Χωροστάθμηση με τα Παγκόσμια Συστήματα Προσδιορισμού Θέσης (GNSS)

Δ. Ρωσσικόπουλος

Τομέας Γεωδαισίας και Τοπογραφίας, Πολυτεχνική Σχολή, ΤΑΤΜ - ΑΠΘ.

Περίληψη: Ένα από τα πιο ενδιαφέροντα θέματα στον τομέα των τοπογραφικών εργασιών παραμένει μέχρι και σήμερα ο ακριβής προσδιορισμός των ορθομετρικών υψομέτρων από μετρήσεις των δορυφορικών συστημάτων GNSS, λαμβάνοντας υπόψη δεδομένα γεωμετρικής χωροστάθμησης καθώς και πρόσθετες πληροφορίες από το πεδίο βαρύτητας. Η εργασία αυτή παρουσιάζει καταρχήν τις διάφορες στρατηγικές λύσης που εμφανίζονται στη σχετική βιβλιογραφία, όπως είναι η μέθοδος της σημειακής προσαρμογής, όπου τα υψόμετρα του γεωειδούς, που σχετίζονται με το πεδίο βαρύτητας, αντιμετωπίζονται ως στοχαστικά μεγέθη, ή η μέθοδος της αναλυτικής παρεμβολής όπου το γεωειδές περιγράφεται από πολυώνυμα διαφόρων τάξεων. Στη συνέχεια επικεντρώνεται στις μεθόδους της λεγόμενης ολοκληρωμένης γεωδαισίας, που αποτελεί μια γενίκευση των πιο πάνω μεθοδολογιών και όπου είναι δυνατή η ταυτόχρονη επεξεργασία κάθε τύπου γεωδαιτικών δεδομένων. Στην περίπτωση αυτή ως άγνωστες στοχαστικές παράμετροι μπορούν να εμφανιστούν όχι μόνο τα υψόμετρα του γεωειδούς, αλλά και άλλες παράμετροι που σχετίζονται με το πεδίο βαρύτητας και που συνδέονται με την άγνωστη συνάρτηση του διαταρακτικού δυναμικού. Εκτός από τις διάφορες επιλογές στο πρόβλημα της εκτίμησης των ορθομετρικών υψομέτρων αναλύεται και το θέμα των στατιστικών ελέγχων στα γραμμικά μοντέλα με στοχαστικές παραμέτρους, καθώς και το πρόβλημα της εκτίμησης των συνιστωσών της μεταβλητότητας αναφοράς, όπως προκύπτουν τα θέματα αυτά στις εφαρμογές των μεθόδων της ολοκληρωμένης γεωδαισίας.

1. Εισαγωγή

Η χωροστάθμηση με τα παγκόσμια συστήματα προσδιορισμού θέσης γίνεται όλο και πιο δημοφιλής στην καθημερινή γεωδαιτική πρακτική και καθιερώνεται ως η κύρια τεχνική προσδιορισμού υψομετρικών διαφορών, καθώς προσφέρει τεχνικές λιγότερο δαπανηρές από τη γεωμετρική χωροστάθμηση ή και την τριγωνομετρική υψομετρία, κυρίως όταν πρόκειται για σημεία που απέχουν μεταξύ τους μεγάλες αποστάσεις.[1] Βέβαια, ως τεχνική είναι τελείως διαφορετική, καθώς δεν υπάρχει πια η έννοια της όδευσης, άλλες είναι οι πηγές των σφαλμάτων που καθορίζουν την ποιότητα των τελικών υψομέτρων, τα υψόμετρα αναφέρονται σε διαφορετικά

1. Σχετικά με τις “κλασικές” μεθόδους χωροστάθμησης βλ. Βλάχος (1987).

συστήματα αναφοράς, αλλά και η έννοια του υψομέτρου ορίζεται με διαφορετικό τρόπο.

Από τις παρατηρήσεις των δορυφορικών συστημάτων GNSS προσδιορίζονται σχετικά γεωδαιτικά υψόμετρα, στο WGS' 84 ή σε άλλο γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς, με ακρίβειες της τάξης μερικών χιλιοστών για αποστάσεις μέχρι και μερικές δεκάδες χιλιόμετρα. Η ακρίβεια αυτή είναι λίγο χειρότερη από αυτήν της οριζόντιας θέσης των κορυφών του δικτύου, όχι μόνο εξαιτίας της κακής γεωμετρίας ως προς την τρίτη διάσταση, αλλά εξαιτίας ορισμένων συστηματικών επιδράσεων, όπως π.χ. το τροποσφαιρικό σφάλμα, που είναι σημαντικότερο στη διεύθυνση των υψομέτρων, οι μεταβολές των κέντρων φάσης της κεραίας, κλπ. Τα ορθομετρικά υψόμετρα υπολογίζονται στη συνέχεια από τη σχέση

$$H = h - N \tag{1}$$

όπου H το ορθομετρικό υψόμετρο, h το γεωδαιτικό ή ελλειψοειδές υψόμετρο και N το ελλειψοειδές υψόμετρο του γεωειδούς γνωστό ως υψόμετρο του γεωειδούς ή αποχή του γεωειδούς. Επειδή η καμπυλότητα της καμπύλης κατακόρυφης είναι πολύ μικρή, αυτή διαφέρει ασήμαντα από την αντίστοιχη κάθετη στο ελλειψοειδές. Έτσι η παραπάνω σχέση μπορεί να χρησιμοποιηθεί στις συνήθεις τοπογραφικές εργασίες για τη σύνδεση των ορθομετρικών υψομέτρων με τα ελλειψοειδή.

Η ακρίβεια υπολογισμού των ορθομετρικών υψομέτρων εξαρτάται, εκτός από την ακρίβεια των γεωδαιτικών υψομέτρων που προκύπτουν από το σύστημα GNSS, και από την ακρίβεια προσδιορισμού της επιφάνειας του τοπικού γεωειδούς. Το τοπικό γεωειδές προσδιορίζεται από μετρήσεις βαρύτητας και υψομέτρων με τεχνικές της φυσικής γεωδαισίας και η ακρίβειά του φθάνει τα μερικά εκατοστά, ανάλογα με την ακρίβεια των βαρυτημετρικών δεδομένων. Οι ακρίβειες αυτές βέβαια αναφέρονται σε απόλυτα υψόμετρα και βελτιώνονται σημαντικά στον υπολογισμό των υψομετρικών διαφορών, που προκύπτουν από τις γεωδαιτικές παρατηρήσεις. Τα υψόμετρα του γεωειδούς N, υπολογίζονται για τις κορυφές του δικτύου με κάποια κατάλληλη μέθοδο παρεμβολής (π.χ. αναλυτική παρεμβολή, σημειακή προσαρμογή, κλπ.), ανάλογα με την έκταση της περιοχής, τη μορφή του γεωειδούς και τα δεδομένα που διατίθενται.

Οι παρατηρήσεις λοιπόν, από τη σκοπιά μιας ολοκληρωμένης προσέγγισης, μπορεί να είναι βάσεις ή συντεταγμένες GNSS, ορθομετρικά υψόμετρα ή υψομετρικές διαφορές, υψόμετρα γεωειδούς, τιμές της βαρύτητας, διαφορές δυναμικού, αποκλίσεις της κατακορύφου και γενικότερα κάθε πληροφορία σχετική με το γήινο πεδίο βαρύτητας στα σημεία του δικτύου ή ακόμη και σε σημεία στην περιοχή του δικτύου. Στην πιο απλή και πιο δημοφιλή περίπτωση, σύμφωνα με τη σχετική βιβλιογραφία, έχουμε τις εξισώσεις:

α. των γεωδαιτικών υψομέτρων h_i^{GNSS}

$$h_i^{GNSS} = H_i + N_i + v_i^h \tag{2}$$

που προκύπτουν από την ανάλυση των παρατηρήσεων GNSS,

β. τις εξισώσεις των ορθομετρικών υψομέτρων H_i^{LEV}

$$H_i^{LEV} = H_i + v_i^H \tag{3}$$

που προκύπτουν από γεωμετρική χωροστάθμηση και

γ. τις εξισώσεις των υψομέτρων του γεωειδούς N_i^{GEO}

$$N_i^{GEO} = N_i + \delta N_i + v_i^N \tag{4}$$

που προκύπτουν στα σημεία του δικτύου εφαρμόζοντας κατάλληλες μεθόδους παρεμβολής, όπου δN_i είναι οι διορθώσεις που ελαχιστοποιούν τα μεγάλου μήκους κύματος σφάλματα, τα οποία εμφανίζονται από την αδυναμία πολύ μεγάλου βαθμού ανάπτυξης των γεωδυναμικών μοντέλων επειδή το ύψος N_i^{GEO} αναφέρεται σ' ένα τοπικό γεωειδές που προέκυψε από την ανάλυση κυρίως τοπικών δεδομένων. Οι διορθώσεις αυτές σχετίζονται με τα διαφορετικά συστήματα αναφοράς καθώς και με μικρές μεταβολές του ελλειψοειδούς αναφοράς κατά θέση και μέγεθος[2].

Εκτός από τα υψόμετρα του γεωειδούς τα δεδομένα του πεδίου βαρύτητας είναι δυνατόν να δοθούν και σε άλλη μορφή, π.χ. ως αποκλίσεις της κατακορύφου, ανωμαλίες βαρύτητας, κλπ. Σε κάθε περίπτωση πρέπει να λαμβάνονται υπόψη οι διορθώσεις των διαφορετικών συστημάτων αναφοράς.

2. Η εφαρμογή μεθόδων της σημειακής προσαρμογής

Ανάλογα με τα δεδομένα του πεδίου βαρύτητας ή/και τα ορθομετρικά υψόμετρα που διατίθενται στην περιοχή ενός δικτύου GNSS, διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις υπολογισμού των ορθομετρικών υψομέτρων:

Έστω ότι στην περιοχή του δικτύου GNSS δεν υπάρχει πληροφορία για το γεωειδές, αλλά είναι γνωστά τα ορθομετρικά υψόμετρα σε ορισμένες κορυφές. Οι εξισώσεις παρατήρησης για κάθε σημείο με γνωστό ορθομετρικό υψόμετρο γράφονται

$$\begin{aligned} h_i^{GNSS} &= H_i + N_i + v_i^h \\ H_i^{LEV} &= H_i + v_i^H \;, \quad i = 1,2,\ldots,n \end{aligned} \tag{7}$$

ή ισοδύναμα

2. Σχετικά με τους μετασχηματισμούς των γεωδαιτικών υψομέτρων και των υψομέτρων του γεωειδούς μεταξύ διαφορετικών συστημάτων αναφοράς βλ. Heiskanen and Moritz (1967), Soler (1976), Kotsakis (2008).

$$w_i = h_i^{GNSS} - H_i^{LEV} = N_i + v_i \tag{8}$$

όπου $v_i = v_i^h - v_i^H$ είναι το συνολικό σφάλμα παρατήρησης.

Στην περίπτωση αυτή η πιο συνήθης μέθοδος στις τοπογραφικές εφαρμογές βασίζεται στον υπολογισμό των υψομέτρων του γεωειδούς με την εφαρμογή μιας αναλυτικής παρεμβολής, χρησιμοποιώντας γραμμικές συναρτήσεις της μορφής

$$N_i = f(x_i, y_i) = \sum_{k=1}^{m} a_k \; \varphi_k(x_i, y_i) \tag{9}$$

όπου x_i, y_i είναι οι γνωστές συντεταγμένες του σημείου i, a_k είναι πραγματικοί αριθμοί, άγνωστες παράμετροι που πρέπει να εκτιμηθούν στο πρόβλημα της παρεμβολής, και οι "επιλεγμένες" συναρτήσεις φ_i (i = 1, 2, ..., m) ονομάζονται *συναρτήσεις βάσεις*. Τα δημοφιλέστερα παραδείγματα συναρτήσεων βάσης είναι η επιλογή μονώνυμων της μορφής $x^i y^j$

$$1, x, y, x^2, y^2, xy, x^3, y^3, x^2y, \ldots \tag{10}$$

ή συνδυασμοί των παραπάνω, καθώς και τριγωνομετρικά πολυώνυμα που προκύπτουν από αναπτύγματα των σειρών Fourier. Οι συναρτήσεις αυτές έχουν εμφανιστεί στη βιβλιογραφία από τις αρχές της δεκαετίας του 70 σε εφαρμογές φωτογραμμετρίας, τοπογραφίας και γεωδαισίας, όπως π.χ. η αυτοματοποιημένη χάραξη ισοϋψών καμπύλων, ο υπολογισμός του γεωειδούς από δεδομένα δορυφορικής αλτιμετρίας, κλπ.

Μια άλλη επιλογή συναρτήσεων βάσης που χρησιμοποιήθηκε για την περιγραφή του ανάγλυφου του εδάφους και θεωρήθηκαν ως οι καταλληλότερες για το πρόβλημα της χάραξης των ισοϋψών καμπύλων στις χαρτογραφικές και φωτογραμμετρικές εφαρμογές (Hardy 1971) καταρχήν και στη συνέχεια για την περιγραφή των κατακόρυφων μετακινήσεων του γήινου φλοιού (Hardy 1977, Holdahl 1978), είναι οι συναρτήσεις της μορφής

$$\varphi_k(x_i, y_i) = [(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + \delta^2]^{1/p} \tag{11}$$

όπου x_k, y_k είναι οι συντεταγμένες των m ειδικά επιλεγμένων σημείων προσαρμογής των συναρτήσεων που στη συγκεκριμένη εφαρμογή είναι ορισμένα ή όλα τα σημεία με γνωστό υψόμετρο και η πιο συνηθισμένη επιλογή για τις παραμέτρους δ και p είναι $\delta = 0$ και $p = 1,2$. Η εξίσωση παρατήρησης της σχέσης (8) παίρνει τη μορφή

$$w_i = h_i^{GNSS} - H_i^{LEV} = \sum_{k=1}^{m} a_k \;\; \varphi_k(x_i, y_i) + v_i \tag{12}$$

και για όλα τα σημεία με γνωστό ορθομετρικό υψόμετρο το σύστημα των εξισώσεων παρατήρησης γράφεται σε μορφή πινάκων $\mathbf{w} = \mathbf{\Phi}\ \mathbf{a} + \mathbf{v}$. Για την εφαρμογή της πιστής αναλυτικής παρεμβολής, όπου έχουμε ένα απλό πρόβλημα προσαρμογής της συνάρτησης f στις τιμές $N_i^{GNSS} = h_i^{GNSS} - H_i^{LEV}$ των υψομέτρων του γεωειδούς που θεωρούνται γνωστές χωρίς σφάλματα, ικανοποιείται το κριτήριο βελτιστοποίησης $\mathbf{v}^T\mathbf{v} = \min.$, ενώ για την εξομαλυντική αναλυτική παρεμβολή, όπου οι τιμές των υψομέτρων του γεωειδούς αντιμετωπίζονται ως παρατηρήσεις που συνοδεύονται από τον πίνακα συμμεταβλητοτήτων τους

$$\mathbf{M} = \sigma_h^2\,\mathbf{Q}_h + \sigma_H^2\,\mathbf{Q}_H \tag{13}$$

το κριτήριο βελτιστοποίησης γίνεται $\mathbf{v}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{v} = \min$. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια των εκτιμήσεων $\hat{\alpha}_{kl},\ldots$ που προκύπτουν από τη βέλτιστη προσαρμογή της αναλυτικής σχέσης (9) στις γνωστές τιμές $h_i^{GPS} - H_i^{LEV}$, υπολογίζονται τα ορθομετρικά υψόμετρα για κάθε άλλο σημείο του δικτύου GNSS. Η ακρίβεια προσδιορισμού αυτών των υψομέτρων εξαρτάται από τον αριθμό των σημείων με γνωστά ορθομετρικά υψόμετρα, που ορίζει τον βαθμό του πολυώνυμου, και την κατανομή τους στην περιοχή. Στο δίκτυο θα πρέπει να συμπεριλαμβάνονται τουλάχιστον τρία σημεία με γνωστά ορθομετρικά υψόμετρα.

Έστω ότι σε κάθε σημείο υπολογίζονται αποχές από το μοντέλο του γεωειδούς, αλλά υπάρχουν και σημεία με γνωστά ορθομετρικά υψόμετρα. Με τον συνδυασμό ορθομετρικών υψομέτρων και δεδομένων γεωειδούς είναι δυνατό να ελαχιστοποιηθούν τα μεγάλου μήκους κύματος σφάλματα, τα οποία εμφανίζονται από την αδυναμία πολύ μεγάλου βαθμού ανάπτυξης των γεωδυναμικών μοντέλων εξαιτίας των τοπικών δεδομένων από την ανάλυση των οποίων προέκυψε το γεωειδές. Για κάθε σημείο του δικτύου GNSS με γνωστό ορθομετρικό υψόμετρο ισχύουν οι τρείς εξισώσεις

$$\begin{aligned} h_i^{GNSS} &= H_i + N_i + v_i^h \\ H_i^{LEV} &= H_i + v_i^H \\ N_i^{GEO} &= N_i + \delta N_i + v_i^N \end{aligned} \tag{14}$$

ή ισοδύναμα

$$h_i^{GNSS} - H_i^{LEV} - N_i^{GEO} = \delta N_i + v_i \tag{15}$$

όπου $v_i = v_i^h - v_i^H - v_i^N$. Υπολογίζονται οι διορθώσεις

$$w_i = \delta N_i = h_i^{GNSS} - H_i^{LEV} - N_i^{GEO} = N_i^{GNSS} - N_i^{GEO} \tag{16}$$

και γίνεται η προσαρμογή του μοντέλου μετασχηματισμού του τύπου της σχέσης (9), που αν θεωρήσουμε ότι το παγκόσμιο σύστημα που αναφέρονται οι παρατηρήσεις GNSS και το τοπικό διαφέρουν κατά κλίμακα και είναι σχεδόν παράλληλα μεταξύ τους και ότι το ελλειψοειδές που χρησιμοποιεί το παγκόσμιο σύστημα έχει πρακτικά ίδιες διαστάσεις με αυτές του τοπικού συστήματος, η σχέση αυτή γράφεται στη μορφή

$$\delta N_i = \alpha_o + \alpha_1 \cos\varphi_i \cos\lambda_i + \alpha_2 \cos\varphi_i \sin\lambda_i + \alpha_3 \cos\varphi_i + v_i \tag{17}$$

όπου εμφανίζονται ως άγνωστες παράμετροι μόνο οι όροι της μετάθεσης a_1, a_2, a_3 και της μεταβολής της κλίμακας a_o. Η προσαρμογή γίνεται θεωρώντας τις τιμές $\delta N_i = N_i^{GNSS} - N_i^{GEO}$ παρατηρήσεις, σύμφωνα με το σύστημα των εξισώσεων παρατήρησης

$$\mathbf{w} = \mathbf{\Phi}\ \mathbf{a} + \mathbf{v} \quad , \quad \mathbf{v}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{v} = \min. \tag{18}$$

όπου ο πίνακας συμμεταβλητοτήτων τους είναι

$$\mathbf{M} = \sigma_h^2\ \mathbf{Q}_h + \sigma_H^2\ \mathbf{Q}_H + \sigma_N^2\ \mathbf{Q}_N\,. \tag{19}$$

Στη συνέχεια, με τη βοήθεια των εκτιμήσεων $\hat{\alpha}_o,...$ που προέκυψαν από τη βέλτιστη προσαρμογή της αναλυτικής σχέσης (17) στις γνωστές τιμές $N_i^{GPS} - N_i^{GEO}$, υπολογίζονται οι διορθώσεις δN_i για κάθε άλλο σημείο, καθώς και τα ορθομετρικά υψόμετρα $H_i = h_i^{GNSS} - N_i^{GEO} - \delta N_i$.

Σε πιο αυστηρή προσέγγιση, η διόρθωση δN_i μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\delta N_i = \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{a} + s_i \tag{20}$$

όπου ο όρος $\boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{a}$, ποσότητα που αποτελεί την “κυρίαρχη τάση” στις παρατηρήσεις δN_i, περιγράφει τη μετάθεση κατά τους τρείς άξονες συνήθως και τη μεταβολή τις κλίμακας σύμφωνα με τη σχέση (17), και s_i είναι οι στοχαστικές μεταβλητές, τα *σήματα* όπως ονομάζονται τέτοιου είδους παράμετροι, που περιγράφουν το μικρό μέρος που απομένει σε κάθε διαφορά δN_i (Kotsakis and Sideris, 1999, Denker et al., 2000).

Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό πινάκων, για το σύνολο των σημείων του δικτύου GNSS στα οποία διατίθενται και ορθομετρικά υψόμετρα, καταλήγουμε σε τρεις διαφορετικούς τρόπους αντιμετώπισης: Στις δύο περιπτώσεις καταρχήν, της *πιστής σημειακής προσαρμογής* (Denker et al., 2000)

$$\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{s} + \mathbf{v} \quad , \quad \mathbf{s}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{s} = \min\,. \tag{21}$$

ή της *εξομαλυντικής σημειακής προσαρμογής*

$$\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{s} + \mathbf{v}\ ,\ \mathbf{v}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{v} + \mathbf{s}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{s} = \min. \tag{22}$$

όπου $\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w} - \mathbf{\Phi}\,\mathbf{a}$, ο όρος $\boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{a}$ υπολογίζεται εκ των προτέρων με τη βοήθεια μιας παρεμβολής του τύπου της εξίσωσης (18) σύμφωνα με τον τρόπο που αναλύθηκε παραπάνω, και διορθώνει τις παρατηρήσεις δN_i.

Η τρίτη περίπτωση, που αποτελεί μια πιο “ολοκληρωμένη” αντιμετώπιση του προβλήματος της απομάκρυνσης της κυρίαρχης τάσης, είναι η εφαρμογή ενός τύπου *μικτής παρεμβολής* (Kotsakis and Sideris, 1999)

$$\mathbf{w} = \mathbf{\Phi}\,\mathbf{a} + \mathbf{s} + \mathbf{v} \quad , \quad \mathbf{v}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{v} + \mathbf{s}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{s} = \min . \tag{23}$$

όπου και οι παράμετροι $\mathbf{a}$ που περιγράφουν τις μεταβολές των συστημάτων αναφοράς, συμμετέχουν στο πρόβλημα της συνόρθωσης.

Ο πίνακας συμμεταβλητοτήτων $\mathbf{M}$ των συνολικών σφαλμάτων δόθηκε προηγούμενα στη σχέση (19) και τα στοιχεία του πίνακα συμμεταβλητοτήτων $\mathbf{K}$ των σημάτων $\mathbf{s}$ προκύπτουν ως τιμές μιας επιλεγμένης συνάρτησης συμμεταβλητότητας. Ο πίνακας αυτός περιέχει τις πληροφορίες τις σχετικές με τη στοχαστική συμπεριφορά των σημάτων, ώστε να είναι δυνατός ο διαχωρισμός τους από τα σφάλματα των παρατηρήσεων, και τα στοιχεία του, οι *συμμεταβλητότητες των σημάτων*, είναι οι τιμές των αντίστοιχων συναρτήσεων συμμεταβλητότητας[3].

Μια τυπική επιλογή συνάρτησης συμμεταβλητότητας για τέτοιου είδους τοπικές εφαρμογές είναι οι εκθετικές συναρτήσεις της μορφής

$$K(S) = \sigma^2 e^{-d^2 S^2} \tag{24}$$

όπου $\sigma^2 = K(0)$ είναι η μεταβλητότητα, d η απόσταση συσχέτισης και S η οριζόντια απόσταση μεταξύ των σημείων στα οποία αναφέρονται τα σήματα.
Διάφορες μορφές τοπικών συναρτήσεων συμμεταβλητότητας, που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στις παραπάνω περιπτώσεις, δίνονται στην πρώτη στήλη του πίνακα (1) ως συναρτήσεις συμμεταβλητότητας του διαταρακτικού δυναμικού.

Πίνακας 1: *Διάφορες μορφές συναρτήσεων συμμεταβλητότητας K(S) του διαταρακτικού δυναμικού και οι αντίστοιχες της ανωμαλίας βαρύτητας.*

Συνάρτηση	Διαταρακτικού δυναμικού $K(S)$	Ανωμαλίας βαρύτητας $K_{\Delta g}(S)$
Markov δεύτερης τάξης	$\sigma_T^2 \left(1 + \dfrac{S}{2d}\right) e^{-S/d}$	$\sigma_g^2 \left(1 - \dfrac{S}{2d}\right) e^{-S/d}$
Markov τρίτης τάξης	$\sigma_T^2 \left(1 + \dfrac{S}{d} + \dfrac{S^2}{3d^2}\right) e^{-S/d}$	$\sigma_g^2 \left(1 + \dfrac{S}{d} - \dfrac{S^2}{3d^2}\right) e^{-S/d}$
Moritz	$\sigma_T^2 \dfrac{d}{\sqrt{S^2 + d^2}}$	$\sigma_g^2 d^3 \dfrac{2d^2 - S^2}{\sqrt{(S^2 + d^2)^5}}$
Poisson	$\sigma_T^2 \dfrac{d^3}{\sqrt{(S^2 + d^2)^3}}$	$\sigma_g^2 d^5 \dfrac{6d^2 - 9S^2}{\sqrt{(S^2 + d^2)^7}}$

3. Για τη θεωρητική τεκμηρίωση των προβλημάτων πρόγνωσης και συνόρθωσης με στοχαστικές παραμέτρους παραπέμπουμε στην εργασία *Θεωρία και εφαρμογή της μεθόδου της σημειακής προσαρμογής σε τοπογραφικά προβλήματα* (Δερμάνης, 1984) καθώς και στο βιβλίο *Συνορθώσεις Παρατηρήσεων και Θεωρία Εκτίμησης*, Τόμος 2 (Δερμάνης, 1987).

Σχετικά με τις συναρτήσεις συμμεταβλητότητας στις παραπάνω εφαρμογές παρεμβολής, πρέπει να παρατηρήσουμε τα εξής:

1. Η επιλεγμένη συνάρτηση συμμεταβλητότητας πρέπει να ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες: να είναι θετικά ορισμένη, να είναι αρμονική, ομογενής και ισότροπη. Μια συνάρτηση συμμεταβλητότητας είναι ομογενής όταν δεν εξαρτάται από την απόλυτη θέση των δύο σημείων και ισότροπη όταν δεν εξαρτάται από τη διεύθυνση που ορίζουν τα δύο σημεία.
2. Στην περίπτωση της πιστής σημειακής προσαρμογής, όπου οι ποσότητες $\mathbf{s}$, τα σήματα, είναι οι μοναδικές που συμμετέχουν στο κριτήριο βελτιστοποίησης, η μεταβλητότητα $\sigma^2 = K(0)$ μπορεί να ληφθεί ίση με τη μονάδα, και το μήκος συσχέτισης d είναι το μήκος όπου η τιμής της συνάρτησης συμμεταβλητότητας είναι ίση με το μισό της μεταβλητότητας. Υπολογίζεται από τις σχέσεις

$$K(d) = \frac{1}{2}K(0) = \frac{1}{2}\sigma^2 \;\Rightarrow\; d = ... \tag{25}$$

3. Στις περιπτώσεις εφαρμογής της εξομαλυντικής ή της μικτής παρεμβολής, όπου θα πρέπει να διαχωριστούν τα σήματα από τα σφάλματα των παρατηρήσεων, οι τιμές των παραμέτρων σ^2 και d προκύπτουν από την προσαρμογή της επιλεγμένης συνάρτησης συμμεταβλητότητας σ' ένα ικανό αριθμό των δειγματικών τιμών $\delta N_i - \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{a}$, οι οποίες υπολογίζονται μετά από μια αρχική εκτίμηση της κυρίαρχης τάσης $\boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{a}$. Συνήθως, οι δειγματικές αυτές τιμές είναι περιορισμένες και δεν μετριούνται απευθείας, αλλά προκύπτουν από μια αρχική εφαρμογή μεθόδων αναλυτικής παρεμβολής. Το πρακτικό πρόβλημα που προκύπτει πολλές φορές είναι ότι αυτές οι δειγματικές τιμές δεν είναι κατάλληλες ώστε να γίνει η προσαρμογή της επιλεγμένης συνάρτησης συμμεταβλητότητας.
4. Το παραπάνω πρόβλημα της μη ύπαρξης των κατάλληλων δειγματικών τιμών μπορεί να αντιμετωπισθεί με μια γενίκευση της θεωρίας εκτίμησης των συνιστωσών των μεταβλητοτήτων, όπου αντιμετωπίζεται επιπλέον και η ταυτόχρονη διόρθωση της αρχικής εκτίμησης των αγνώστων παραμέτρων (σ^2 και d) της συνάρτηση συμμεταβλητότητας.

3. Η περίπτωση της ολοκληρωμένης γεωδαισίας

Στα προηγούμενα παρουσιάσθηκαν διάφορες μέθοδοι παρεμβολής όπου οι τιμές δN_i των διορθώσεων των υψομέτρων του γεωειδούς θεωρήθηκαν ως τιμές μιας άγνωστης συνάρτησης. Σ' ένα γενικότερο σύστημα συνόρθωσης όλα τα δεδομένα τα σχετικά με τα υψόμετρα των σημείων του δικτύου GNSS, τα γεωδαιτικά υψόμετρα, τα ορθομετρικά υψόμετρα, τα υψόμετρα του γεωειδούς κλπ., μπορούν να συμμετάσχουν στη συνόρθωση ως παρατηρήσεις, όπου συμμετέχουν ως άγνωστες παράμετροι οι ανωμαλίες ύψους N_i, ως σήματα καθώς εξαρτώνται από το πεδίο βαρύτητας, τα υψόμετρα H_i και όλες οι παράμετροι που σχετίζονται με τα διαφορετικά συστήματα αναφοράς και περιγράφουν τις διορθώσεις του τύπου δN_i.

Έστω λοιπόν ότι σ' ένα δίκτυο *n* σημείων δίνεται το γεωδαιτικό υψόμετρο h_i^{GNSS} για κάθε σημείο που προέκυψε από τη συνόρθωση των παρατηρήσεων του συστήματος GNSS και επίσης ορισμένα σημεία του δικτύου συνδέονται με παρατηρήσεις γεωμετρικής χωροστάθμησης ή είναι γνωστά τα ορθομετρικά τους υψόμετρα. Σχετικά με τα υψόμετρα του γεωειδούς δεν είναι απαραίτητο να αναφέρονται στα σημεία του δικτύου. Εναλλακτικά, μπορεί να δίνονται σε ορισμένα ή σε όλα τα σημεία του δικτύου όπως προέκυψαν από δεδομένα του πεδίου βαρύτητας στην περιοχή εφαρμόζοντας μεθόδους παρεμβολής, ή μπορεί να δίνονται σε σημεία στην περιοχή του δικτύου, πριν από την εφαρμογή των μεθόδων παρεμβολής.

Το σύστημα των εξισώσεων παρατηρήσεων για το σύνολο των παρατηρήσεων που διατίθενται ως παρατηρήσεις του κατακόρυφου δικτύου GNSS, γράφεται

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}\ \mathbf{x} + \mathbf{B}\,\mathbf{y} + \mathbf{G}\ \mathbf{s} + \mathbf{v} \tag{26}$$

όπου οι παράμετροι $\mathbf{y}$ οι σχετικές με τους μετασχηματισμούς των συστημάτων αναφοράς συμμετέχουν ως άγνωστες παράμετροι, ή

$$\widetilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w} - \mathbf{B}\,\mathbf{y} = \mathbf{A}\ \mathbf{x} + \mathbf{G}\ \mathbf{s} + \mathbf{v} \tag{27}$$

όπου οι παράμετροι $\mathbf{y}$ θεωρούνται γνωστές και χρησιμοποιούνται για τη διόρθωση των παρατηρήσεων, το διάνυσμα $\mathbf{x}$ περιέχει τα ορθομετρικά υψόμετρα ($x_i = H_i$, οι ντετερμινιστικές παράμετροι), το $\mathbf{s}$ περιέχει τα υψόμετρα του γεωειδούς ($s_i = N_i$, οι στοχαστικές παράμετροι) και $\mathbf{v}$ είναι τα σφάλματα των παρατηρήσεων. Το πρόβλημα συνόρθωσης είναι ένα πρόβλημα εκτίμησης των παραμέτρων $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ και πρόγνωσης των παραμέτρων $\mathbf{s}$ και $\mathbf{v}$. Ας θεωρήσουμε για λόγους απλότητας ότι οι αδιάφορες παράμετροι $\mathbf{y}$ είναι γνωστές ή ότι απαλείφονται με κάποιο τρόπο από το σύστημα των εξισώσεων των παρατηρήσεων.

3.1. Η στοχαστική αντιμετώπιση των υψομέτρων του γεωειδούς

Στη *στοχαστική αντιμετώπιση* των υψομέτρων του γεωειδούς, το κριτήριο των ελαχίστων τετραγώνων είναι

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{G}\,\mathbf{s} + \mathbf{v}\ , \quad \mathbf{s}^T \mathbf{K}^{-1}\,\mathbf{s} + \mathbf{v}^T\,\mathbf{P}\ \mathbf{v} = \min. \tag{28}$$

Εδώ το ζήτημα της δημιουργία μιας συνάρτησης συμμεταβλητότητας είναι πιο αυστηρό σε σχέση με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω. Τα στάδια δημιουργίας μιας τοπικής συνάρτησης συμμεταβλητότητας είναι τρία: Αρχικά γίνεται η επιλογή της συνάρτησης συμμεταβλητότητας–μοντέλο. Στη συνέχεια, πρέπει να γίνει υπολογισμός των εμπειρικών τιμών της συνάρτησης από τη στατιστική ανάλυση σχετικών δεδομένων σε διακριτά σημεία και η προσαρμογή του επιλεγμένου μοντέλου της συνάρτησης στις παραπάνω τιμές. Τέλος, επειδή τα άγνωστα σήματα δεν αναφέρονται στο επίπεδο ορισμού της συνάρτησης αλλά στη φυσική επιφάνεια του εδάφους, επεκτείνεται η συνάρτηση στον ημιχώρο πάνω από το επίπεδο ορισμού της, έτσι ώστε να παραμείνει ομογενής, ισότροπη και αρμονική στις τρεις διαστάσεις.

Η συνάρτηση συμμεταβλητότητας των υψομέτρων του γεωειδούς μπορεί να προκύψει απευθείας από γνωστές τιμές υψομέτρων στην περιοχή του δικτύου GNSS ή συνήθως, από δεδομένα του πεδίου βαρύτητας στην περιοχή, ανεξάρτητα από τις παρατηρήσεις του δικτύου. Γενικότερα οι συμμεταβλητότητες των σημάτων, τα στοιχεία του πίνακα **K**, προκύπτουν από τη συνάρτηση συμμεταβλητότητας $K(S)$ του διαταρακτικού δυναμικού μεταξύ δύο σημείων, εφαρμόζοντας το νόμο μετάδοσης συμμεταβλητοτήτων στα συναρτησιακά που συνδέουν τα σήματα με το διαταρακτικό δυναμικό.[4] Στον πίνακα (1) δίνονται οι συναρτήσεις Markov δεύτερης και τρίτης τάξης και η γενικευμένη συνάρτηση Hirvonen για m=1/2 (συνάρτηση Moritz) και για m=3/2 (συνάρτηση Poisson). Οι μεταβλητότητες του διαταρακτικού δυναμικού σ_T^2 και της ανωμαλίας βαρύτητας σ_g^2 στους τύπους του παραπάνω πίνακα, καθώς και του υψομέτρου του γεωειδούς σ_N^2, συνδέονται μεταξύ τους μέσω των σχέσεων

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{2} d^2 \sigma_g^2 \quad \text{και} \quad \sigma_N^2 = \frac{1}{\gamma_o^2} \sigma_T^2 = \frac{1}{2\gamma_o^2} d^2 \sigma_g^2 \tag{29}$$

όπου γ_o είναι μια μέση τιμή της κανονικής βαρύτητας στην περιοχή του γεωδαιτικού δικτύου. Με τη βοήθεια των σχέσεων του πίνακα (1) περνάμε εύκολα από τη συνάρτηση συμμεταβλητότητας της ανωμαλίας βαρύτητας, η οποία επιλέγεται αρχικά και προσαρμόζεται σε αντίστοιχες εμπειρικές τιμές, στη συνάρτηση συμμεταβλητότητας του διαταρακτικού δυναμικού και στη συνέχεια, η συνάρτηση συμμεταβλητότητας του υψόμετρου του γεωειδούς προκύπτει ότι είναι

$$K_N(S_{ij}) = \frac{1}{\gamma_o^2} K(S_{ij}) \quad . \tag{30}$$

Στα γεωδαιτικά δίκτυα όμως, τα άγνωστα σήματα δεν αναφέρονται στο επίπεδο όπου ορίζεται η συνάρτηση συμμεταβλητότητας, αλλά στη φυσική επιφάνεια του εδάφους. Επειδή τα σημεία έχουν υψομετρική διαφορά και δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, απαιτείται κάποιο τρισδιάστατο στατιστικό μοντέλο του διαταρακτικού δυναμικού. Η συνάρτηση συμμεταβλητότητας στις τρεις διαστάσεις πρέπει να είναι ομογενής, ισότροπη, αρμονική και θετικά ορισμένη και μετά την επέκταση της στον χώρο, πάνω από το επίπεδο ορισμού της. Τοπικές συναρτήσεις συμμετα-

4. Η εκλογή της συνάρτησης συμμεταβλητότητας του διαταρακτικού δυναμικού ως βασική συνάρτηση οφείλονται στην απλή μορφή των συναρτησιακών που συνδέουν τα σήματα με το διαταρακτικό δυναμικό. Στην πράξη όμως διατίθενται τιμές της ανωμαλίας βαρύτητας και όχι του διαταρακτικού δυναμικού. Επομένως, αρχικά μπορούν να υπολογιστούν διακριτές τιμές συμμεταβλητοτήτων των ανωμαλιών βαρύτητας από την στατιστική επεξεργασία σχετικών δεδομένων. Η έννοια της συμμεταβλητότητας των σημάτων, η μορφή της συνάρτησης συμμεταβλητότητας του διαταρακτικού δυναμικού και η δημιουργία του πίνακα **K** εξετάζονται αναλυτικά στις εργασίες των Moritz (1976), Meier (1981) και Ρωσσικόπουλος (1986).

βλητότητας του διαταρακτικού δυναμικού, οι επεκτάσεις τους στο χώρο πάνω από το επίπεδο ορισμού τους και οι αντίστοιχες συναρτήσεις της ανωμαλίας βαρύτητας δίνονται στον πίνακα (2).

Πίνακας 2: *Τοπικές συναρτήσεις συμμεταβλητότητας της ανωμαλίας βαρύτητας και του διαταρακτικού δυναμικού.*

	Ανωμαλία Βαρύτητας $K_{\Delta g}(S)$	Διαταρακτικό Δυναμικό $K(S)$	$K(S,z)$
Moritz	$\sigma_g^2 d^3 \dfrac{2d^2 - S^2}{2\sqrt{(S^2+d^2)^5}}$	$\sigma_g^2 \dfrac{d^3}{2\sqrt{S^2+d^2}}$	$\sigma_g^2 \dfrac{d^3}{2\sqrt{S^2+(z+d)^2}}$
Poisson	$\sigma_g^2 d^5 \dfrac{6d^2 - 9S^2}{2\sqrt{(S^2+d^2)^7}}$	$\sigma_g^2 \dfrac{d^5}{6\sqrt{(S^2+d^2)^3}}$	$\sigma_g^2 \dfrac{(z+d)d^4}{6\sqrt{(S^2+(z+d)^2)^3}}$

S *η οριζόντια απόσταση μεταξύ δύο σημάτων,* d *το μήκος συσχέτισης και* $z = h_i + h_j$.

Οι εναλλακτικοί τρόποι της στοχαστικής αντιμετώπισης των υψομέτρων του γεωειδούς είναι οι εξής:

1. Με την εφαρμογή μεθόδων σημειακής προσαρμογής υπολογίζονται οι τιμές των υψομέτρων του γεωειδούς στις κορυφές του δικτύου, οι οποίες στη συνέχεια συμμετέχουν ως παρατηρήσεις σύμφωνα με τη σχέση (4) στην τελική συνόρθωση.
2. Οι παρατηρήσεις του δικτύου αναλύονται ταυτόχρονα με τις τιμές του πεδίου βαρύτητας σε σημεία εκτός του δικτύου. Στην περίπτωση αυτή το σύστημα των εξισώσεων παρατήρησης γράφεται αναλυτικά

   $$\mathbf{w}_1 = \mathbf{A}_1\,\mathbf{x}_1 + \mathbf{G}_1\,\mathbf{s}_1 + \mathbf{v}_1$$
   $$\mathbf{w}_2 = \mathbf{s}_2 + \mathbf{v}_2$$

   όπου η πρώτη σχέση αναφέρεται στις κορυφές του δικτύου, ενώ η δεύτερη στα σημεία στην περιοχή όπου διαθέτουμε τιμές του πεδίου βαρύτητας. Οι συναρτήσεις συμμεταβλητότητας δίνονται στον πίνακα (3).
3. Οι πληροφορίες οι σχετικές με το πεδίο βαρύτητας εισάγονται μέσω της συνάρτησης συμμεταβλητότητας που προκύπτει συνήθως από δεδομένα του πεδίου βαρύτητας στην περιοχή.

Πίνακας 3: *Οι συμμεταβλητότητες των σημάτων: αποκλίσεις της κατακορύφου, ανωμαλίες βαρύτητας και υψόμετρα του γεωειδούς.*

	η_j	ξ_j	δg_j	N_j
η_i	$\frac{1}{\gamma^2}\left(\sin^2\alpha\ K' + \frac{\cos^2\alpha}{S}\ K''\right)$	$-\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\gamma^2}\left(K' - \frac{1}{S}\ K''\right)$	$-\frac{\sin\alpha}{\gamma}\frac{\partial^2 K}{\partial z^2}$	$\frac{\sin\alpha}{\gamma^2}K'$
ξ_i		$-\frac{1}{\gamma^2}\left(\cos^2\alpha\ K' + \frac{\sin^2\alpha}{S}\ K''\right)$	$-\frac{\cos\alpha}{\gamma}\frac{\partial^2 K}{\partial S\partial z}$	$\frac{\cos\alpha}{\gamma^2}K'$
δg_i			$-K'' - \frac{1}{S}K'$	$-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial K}{\partial z}$
N_i				$\frac{1}{\gamma^2}K(S,z)$

$\alpha = \arctan\frac{x_j - x_i}{y_j - y_i}$, $S = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$, $z = z_i + z_j$, $K' = \frac{\partial K}{\partial S}$, $K'' = \frac{\partial^2 K}{\partial S^2}$

3.2. Η αναλυτική αντιμετώπιση των υψομέτρων του γεωειδούς

Στην περίπτωση της *αναλυτικής αντιμετώπισης* η άγνωστη συνάρτηση των υψομέτρων του γεωειδούς προσεγγίζεται με ένα πολυώνυμο σύμφωνα με τη σχέση (9). Το σύστημα των εξισώσεων παρατηρήσεων παίρνει τη μορφή

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}\ \mathbf{x} + \mathbf{G}\ \mathbf{\Phi}\ \mathbf{a} + \mathbf{v} = \mathbf{A}\ \mathbf{x} + \mathbf{F}\ \mathbf{a} + \mathbf{v}\ ,\quad \mathbf{v}^T\mathbf{P}\ \mathbf{v} = \min. \tag{31}$$

Μια επιλογή, για παράδειγμα, είναι αυτή της σχέσης (11)

$$N_i = \sum_{k=1}^{m} a_k\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2} = \sum_{k=1}^{m} a_k S_{ik} \quad (i = 1,2,...,n) \tag{32}$$

όπου n είναι οι κορυφές του δικτύου. Έστω ότι σε m σημεία εκτός του δικτύου είναι γνωστές οι τις τιμές των αποκλίσεων της κατακορύφου για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned}
\eta_i &= -\frac{\partial N_i}{\partial y_i} = -\sum_{k=1}^{m} a_k\ \frac{y_i - y_k}{\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2}} = -\sum_{k=1}^{m} a_k\ \frac{y_i - y_k}{S_{ik}} \\
\xi_i &= -\frac{\partial N_i}{\partial x_i} = -\sum_{k=1}^{m} a_k\ \frac{x_i - x_k}{\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2}} = -\sum_{k=1}^{m} a_k\ \frac{x_i - x_k}{S_{ik}}
\end{aligned} \tag{33}$$

Το σύστημα των εξισώσεων παρατήρησης γράφεται

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{A}_1\ \mathbf{x}_1 + \mathbf{F}_1\ \mathbf{a} + \mathbf{v}_1$$
$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{F}_2\ \mathbf{a} + \mathbf{v}_2$$

Πίνακας 4: Οι μεταβλητότητες των σημάτων και οι συμμεταβλητότητες μεταξύ τους στο ίδιο σημείο στην επιφάνεια του εδάφους.

	Moritz	**Poisson**
$\sigma(T_i, T_i)$	$\frac{\sigma_g^2}{2}\frac{d}{d+z}d^2$	$\frac{\sigma_g^2}{2}(\frac{d}{d+z})^2 d^2$
$\sigma(\delta g_i, T_i)$	$\frac{\sigma_g^2}{2}(\frac{d}{d+z})^2 d$	$\frac{\sigma_g^2}{2}(\frac{d}{d+z})^3 d$
$\sigma(\delta g_i, \delta g_i)$	$\sigma_g^2(\frac{d}{d+z})^3$	$\sigma_g^2(\frac{d}{d+z})^4$
$\sigma(\eta_i,T_i)=\sigma(\eta_i,\delta g_i)=\sigma(\xi_i,T_i)=\sigma(\xi_i,\delta g_i)=\sigma(\eta_i,\xi_i)=0$		

όπου η πρώτη σχέση αναφέρεται στις κορυφές του δικτύου, ενώ η δεύτερη στα σημεία στην περιοχή όπου διαθέτουμε τιμές υψομέτρων του γεωειδούς ή αποκλίσεων της κατακορύφου.

3.3. Η μικτή αντιμετώπιση των υψομέτρων του γεωειδούς

Ανάμεσα στις δύο παραπάνω προσεγγίσεις βρίσκεται και μια *συνδυασμένη αναλυτική - στοχαστική αντιμετώπιση* των σημάτων **s**. Ένα τμήμα της άγνωστης συνάρτησης, η κυρίαρχη τάση, περιγράφεται μέσω ενός γραμμικού συνδυασμού των συναρτήσεων βάσης και ένα μικρό μέρος που απομένει μπορεί να αντιμετωπισθεί ως στοχαστική παράμετρος, με τη βοήθεια μιας συνάρτησης συμμεταβλητότητας.

$$N_i = \sum_{k=1}^{m} a_k\ \varphi_k(x_i, y_i) + s_i \tag{34}$$

Το σύστημα των εξισώσεων παρατήρησης γίνεται

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}\ \mathbf{x} + \mathbf{G}\ \mathbf{\Phi}\ \mathbf{a} + \mathbf{G}\ \mathbf{s} + \mathbf{v}\ ,\quad \mathbf{s}^T \mathbf{K}^{-1}\ \mathbf{s} + \mathbf{v}^T \mathbf{P}\ \mathbf{v} = \min. \tag{35}$$

ή

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}\ \mathbf{x} + \mathbf{F}\ \mathbf{a} + \mathbf{e}\ ,\quad \mathbf{e}^T \mathbf{M}^{-1}\ \mathbf{e} = \min. \tag{36}$$

όπου $\mathbf{a}$ είναι οι άγνωστες ντετερμινιστικές παράμετροι, **s** οι στοχαστικές μεταβλητές, $\mathbf{e} = \mathbf{G}\,\mathbf{s} + \mathbf{v}$ είναι το στοχαστικό μέρος των εξισώσεων παρατήρησης και ο αντίστοιχος πίνακας των συμμεταβλητοτήτων $\mathbf{M} = \mathbf{G}\ \mathbf{K}\ \mathbf{G}^T + \mathbf{P}^{-1}$.

4. Επίλογος

Ο ακριβής προσδιορισμός των ορθομετρικών υψομέτρων από μετρήσεις των δορυφορικών συστημάτων GNSS, λαμβάνοντας υπόψη δεδομένα γεωμετρικής χωροστάθμησης καθώς και πρόσθετες πληροφορίες από το πεδίο βαρύτητας παραμένει μέχρι και σήμερα ένα από τα πιο ενδιαφέροντα θέματα στον τομέα των τοπογραφικών εργασιών. Στην εργασία αυτή, αφού έγινε μια σύντομη αναδρομή στις μεθόδους που εμφανίζονται στη σχετική βιβλιογραφία, αναπτύχθηκαν στη συνέχεια μέθοδοι που βασίζονται στη λεγόμενη ολοκληρωμένη γεωδαισία. Στις μεθόδους της ολοκληρωμένης γεωδαισίας συμμετέχουν ως διακριτές άγνωστες παράμετροι τα ορθομετρικά υψόμετρα και όλες οι παράμετροι που σχετίζονται με τα διαφορετικά συστήματα αναφοράς, και ως σήματα τα υψόμετρα του γεωειδούς καθώς σχετίζονται με την άγνωστη συνάρτηση του πεδίου βαρύτητας.

Οι μέθοδοι παρεμβολής που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο (2) αποτελούν ειδική απλοποιημένη περίπτωση των μεθόδων της ολοκληρωμένης γεωδαισίας και κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις δίνουν τα ίδια αποτελέσματα. Στις μεθόδους της ολοκληρωμένης γεωδαισίας συμμετέχουν ταυτόχρονα όλες οι παρατηρήσεις του δικτύου, ανεξάρτητα από τον αριθμό και το είδος τους σε κάθε σημείο. Μπορούν να συμμετάσχουν ακόμη και κάθε μορφής “παρατηρήσεις” του πεδίου βαρύτητας στην περιοχή, εκτός των σημείων του δικτύου.

Σε μια πιο γενικευμένη εφαρμογή της ολοκληρωμένης γεωδαισίας, η εισαγωγή των σημάτων στη συνόρθωση επιτρέπει την ταυτόχρονη ανάλυση τόσο των κλασικών γεωμετρικών παρατηρήσεων (οριζόντιες διευθύνσεις και γωνίες, ζενίθιες γωνίες, βάσεις και συντεταγμένες GNSS, γεωμετρική χωροστάθμηση), όσο και παρατηρήσεων σχετικών με το γήινο πεδίο βαρύτητας (π.χ. αποκλίσεις της κατακορύφου, δυναμική χωροστάθμηση, ένταση του γήινου πεδίου βαρύτητας, κλπ.). Ως σήματα αντιμετωπίζονται οι παράμετροι του πεδίου βαρύτητας, όπως π.χ., διαταρακτικά δυναμικά, ανωμαλίες βαρύτητας, υψόμετρα του γεωειδούς, αποκλίσεις της κατακορύφου κλπ.[5]

Παράρτημα Α. Οι σχετικοί αλγόριθμοι

1. $$\mathbf{w} = \mathbf{A}\ \mathbf{x} + \mathbf{F}\ \mathbf{a} + \mathbf{G}\ \mathbf{s} + \mathbf{v}\ ,\quad \mathbf{s}^T\mathbf{K}^{-1}\ \mathbf{s} + \mathbf{v}^T\mathbf{P}\ \mathbf{v} = \min. \tag{A.1}$$

ή

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}\ \mathbf{x} + \mathbf{F}\ \mathbf{a} + \mathbf{e}\ ,\quad \mathbf{e}^T\mathbf{M}^{-1}\ \mathbf{e} = \min. \tag{A.2}$$

όπου $\mathbf{e} = \mathbf{G}\,\mathbf{s} + \mathbf{v}$ και $\mathbf{M} = \mathbf{G}\ \mathbf{K}\ \mathbf{G}^T + \mathbf{P}^{-1}$. Το σύστημα των κανονικών εξισώσεων γίνεται

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A} & \mathbf{A}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F} \\ \mathbf{F}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A} & \mathbf{F}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{w} \\ \mathbf{F}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{w} \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{N}_x & \mathbf{N}_{xa} \\ \mathbf{N}_{xa}^T & \mathbf{N}_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_a \end{bmatrix} \tag{A.3}$$

5. Οι πρώτες εφαρμογές της ολοκληρωμένης γεωδαισίας στην εκτίμηση των ορθομετρικών υψομέτρων από τις παρατηρήσεις GPS, γεωμετρική χωροστάθμηση και γενικότερα από κάθε είδους παρατήρηση, γεωμετρική ή σχετική με το πεδίο βαρύτητας, έχουν δοθεί από τους Hein (1985), Hein et al. (1988), Eissfeller (1986) και Milbert (1988).

Στην περίπτωση της στοχαστικής αντιμετώπισης των υψομέτρων του γεωειδούς, η ποσότητα $\mathbf{s}^T\mathbf{K}^{-1}\mathbf{s}$ ορίζει την επιφάνεια αναφοράς των υψομέτρων και οι σχετικοί πίνακες δεν παρουσιάζουν αδυναμία βαθμού[6]. Η λύση δίνεται από τις σχέσεις

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}_x^{-1}\left[\mathbf{u}_x - \mathbf{N}_{xa}\mathbf{N}_a^{-1}\mathbf{u}_a\right], \quad \mathbf{Q}_{\hat{x}} = \mathbf{R}_x^{-1} \tag{A.4}$$

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{N}_a^{-1}\left[\mathbf{u}_a - \mathbf{N}_{xa}^T\hat{\mathbf{x}}\right], \quad \mathbf{Q}_{\hat{a}} = \mathbf{N}_a^{-1} + \mathbf{N}_a^{-1}\mathbf{N}_{xa}^T\mathbf{Q}_{\hat{x}}\mathbf{N}_{xa}\mathbf{N}_a^{-1} \tag{A.5}$$

όπου $\mathbf{R}_x = \mathbf{N}_x - \mathbf{N}_{xa}\mathbf{N}_a^{-1}\mathbf{N}_{xa}^T$ και $\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{a}} = -\mathbf{Q}_{\hat{x}}\mathbf{N}_{xa}\mathbf{N}_a^{-1}$ (A.6)

Στη συνέχεια υπολογίζονται τα σήματα και τα σφάλματα των παρατηρήσεων

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{K}\mathbf{G}^T\,\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{w} - \mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{F}\,\hat{\mathbf{a}})\;, \quad \hat{v} = \mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{w} - \mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{F}\,\hat{\mathbf{a}})\quad . \tag{A.7}$$

2. $\mathbf{a} = \mathbf{0}$: $\mathbf{w} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{G}\,\mathbf{s} + \mathbf{v}$, $\mathbf{s}^T\mathbf{K}^{-1}\mathbf{s} + \mathbf{v}^T\mathbf{P}\,\mathbf{v} = \min.$ (A.8)

Το σύστημα των κανονικών εξισώσεων παίρνει τη μορφή

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T\mathbf{P}\,\mathbf{A} & \mathbf{A}^T\mathbf{P}\,\mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T\mathbf{P}\,\mathbf{A} & \mathbf{G}^T\mathbf{P}\,\mathbf{G} + \mathbf{K}^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T\mathbf{P}\,\mathbf{w} \\ \mathbf{G}^T\mathbf{P}\,\mathbf{w} \end{bmatrix} \text{ ή } \begin{bmatrix} \mathbf{N}_x & \mathbf{N}_{xs} \\ \mathbf{N}_{xs}^T & \mathbf{N}_s + \mathbf{K}^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_s \end{bmatrix} \tag{A.9}$$

Η λύση δίνεται από τις σχέσεις

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}_x^{-1}(\mathbf{u}_x - \mathbf{N}_{xs}\mathbf{R}_s^{-1}\mathbf{u}_s)\;, \quad \mathbf{Q}_{\hat{x}} = \mathbf{R}_x^{-1} \tag{A.10}$$

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{R}_s^{-1}(\mathbf{u}_s - \mathbf{N}_{xs}^T\hat{\mathbf{x}})\;, \quad \mathbf{Q}_{\hat{s}} = \mathbf{R}_s^{-1} + \mathbf{R}_s^{-1}\mathbf{N}_{xs}^T\mathbf{Q}_{\hat{x}}\mathbf{N}_{xs}\mathbf{R}_s^{-1} \tag{A.11}$$

όπου $\mathbf{R}_x = \mathbf{N}_x - \mathbf{R}_{xs}\mathbf{R}_s^{-1}\,\mathbf{R}_{xs}^T$, $\mathbf{R}_s = \mathbf{N}_s + \mathbf{K}^{-1}$ και

$$\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{s}} = -\mathbf{Q}_{\hat{x}}\mathbf{N}_{xs}\mathbf{R}_s^{-1} \tag{A.12}$$

3. $\mathbf{s} = \mathbf{0}$: $\mathbf{w} = \mathbf{A}\;\mathbf{x} + \mathbf{F}\;\mathbf{a} + \mathbf{v}$, $\mathbf{v}^T\mathbf{P}\;\mathbf{v} = \min.$ (A.13)

Το σύστημα των κανονικών εξισώσεων παίρνει τη μορφή

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_x & \mathbf{N}_{xa} \\ \mathbf{N}_{xa}^T & \mathbf{N}_a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_a \end{bmatrix} \tag{A.14}$$

όπου $\mathbf{N}_x = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\,\mathbf{A}$, $\mathbf{N}_{xa} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{F}$, $\mathbf{N}_a = \mathbf{F}^T\mathbf{P}\mathbf{F}$ και $\mathbf{u}_x = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{w}$, $\mathbf{u}_a = \mathbf{F}^T\mathbf{P}\mathbf{w}$.

Το αν υπάρχει ή όχι αδυναμία βαθμού στο παραπάνω σύστημα των κανονικών εξισώσεων, εξαρτάται από την μορφή των παρατηρήσεων του χωροσταθμικού δικτύου. Στη γενικότερη περίπτωση, η λύση με ελάχιστες δεσμεύσεις $\mathbf{H}\;\mathbf{x} = \mathbf{z}$, δίνεται από τις σχέσεις

6. Γενικότερα, σχετικά με το πρόβλημα ορισμού του συστήματος αναφοράς στα δίκτυα της ολοκληρωμένης γεωδαισίας βλ. Dermanis (1984) και Ρωσσικόπουλος (1986).

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}_x^{-1}\left[\mathbf{u}_x - \mathbf{N}_{xa}\mathbf{N}_a^{-1}\mathbf{u}_a + \mathbf{H}^T\mathbf{z}\right], \quad \mathbf{Q}_{\hat{x}} = \mathbf{R}_x^{-1} - \mathbf{E}^T(\mathbf{H}\mathbf{E}^T)^{-1}(\mathbf{E}\mathbf{H}^T)^{-1}\mathbf{E} \qquad (A.15)$$

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{N}_a^{-1}\left[\mathbf{u}_a - \mathbf{N}_{xa}^T\hat{\mathbf{x}}\right], \quad \mathbf{Q}_{\hat{a}} = \mathbf{N}_a^{-1} + \mathbf{N}_a^{-1}\mathbf{N}_{xa}^T\mathbf{Q}_{\hat{x}}\mathbf{N}_{xa}\mathbf{N}_a^{-1} \qquad (A.16)$$

όπου $\mathbf{R}_x = \mathbf{N}_x - \mathbf{N}_{xa}\mathbf{N}_a^{-1}\mathbf{N}_{xa}^T + \mathbf{H}^T\mathbf{H}$ και

$$\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{a}} = -\mathbf{Q}_{\hat{x}}\mathbf{N}_{xa}\mathbf{N}_a^{-1} \qquad (A.17)$$

Ο πίνακας $\mathbf{E}$ είναι των εσωτερικών δεσμεύσεων $\mathbf{E}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

4. $\mathbf{w} = \mathbf{F}\,\mathbf{a} + \mathbf{G}\,\mathbf{s} + \mathbf{v}, \quad \mathbf{e}^T\mathbf{M}^{-1}\,\mathbf{e} = \min.$ (A.18)

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{N}_a^{-1}\,\mathbf{u}_a\,, \quad \mathbf{Q}_{\hat{a}} = \mathbf{N}_\alpha^{-1} \qquad (A.19)$$

όπου $\mathbf{e} = \mathbf{G}\,\mathbf{s} + \mathbf{v}$, $\mathbf{M} = \mathbf{G}\,\mathbf{K}\,\mathbf{G}^T + \mathbf{P}^{-1}$ και $\mathbf{N}_a = \mathbf{F}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}$, $\mathbf{u}_a = \mathbf{F}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{w}$. (A.20)

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{K}\mathbf{G}^T\,\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{w} - \mathbf{F}\,\hat{\mathbf{a}})\,, \quad \hat{v} = \mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{w} - \mathbf{F}\,\hat{\mathbf{a}}) \qquad (A.21)$$

4.1 $\mathbf{w} = \mathbf{F}\,\mathbf{a} + \mathbf{s} + \mathbf{v}\,, \quad \mathbf{e}^T\mathbf{M}^{-1}\,\mathbf{e} = \min.$ (A.22)

όπου $\mathbf{e} = \mathbf{s} + \mathbf{v}$, $\mathbf{M} = \mathbf{K} + \mathbf{P}^{-1}$ και

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{K}\,\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{w} - \mathbf{F}\,\hat{\mathbf{a}})\,, \quad \hat{v} = \mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{w} - \mathbf{F}\,\hat{\mathbf{a}}) \qquad (A.23)$$

4.2 $\mathbf{w} = \mathbf{F}\,\mathbf{a} + \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}^T\,\mathbf{P}\,\mathbf{v} = \min.$ (A.24)

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{N}_a^{-1}\,\mathbf{u}_a\,, \quad \mathbf{Q}_{\hat{a}} = \mathbf{N}_\alpha^{-1} \qquad (A.25)$$

όπου $\mathbf{N}_a = \mathbf{F}^T\mathbf{P}\mathbf{F}$ και $\mathbf{u}_a = \mathbf{F}^T\mathbf{P}\,\mathbf{w}$.

Παράρτημα Β. Η εκτίμηση των συνιστωσών της μεταβλητότητας αναφοράς

Αν ονομάσουμε $\mathbf{e} = \mathbf{G}\,\mathbf{s} + \mathbf{v}$ το στοχαστικό μέρος των εξισώσεων των παρατηρήσεων $\mathbf{w} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{G}\,\mathbf{s} + \mathbf{v}$ και $\mathbf{M} = \mathbf{G}\,\mathbf{K}\,\mathbf{G}^T + \mathbf{P}^{-1}$ τον αντίστοιχο πίνακα των συμμεταβλητοτήτων, τότε το πρόβλημα της εκτίμησης των συνιστωσών της μεταβλητότητας αναφοράς στη γενική περίπτωση της ολοκληρωμένης γεωδαισίας[7], διατυπώνεται ως εξής, ανάλογα με την κάθε περίπτωση:

---

7. Αναλυτική επισκόπηση των μεθόδων στη γεωδαιτική βιβλιογραφία δόθηκε από τον Grafarend (1985). Συστηματική αντιμετώπιση του προβλήματος εκτίμησης των συνιστωσών της μεταβλητότητας αναφοράς έγινε από τους Rao (1973) και Schaffrin (1983), όπου διερευνώνται οι σχέσεις μεταξύ των διαφόρων εκτιμήσεων, και Rao and Kleffe (1988), όπου δίνονται οι συνθήκες κάτω από τις οποίες οι εκτιμήσεις ταυτίζονται και αναλύεται το πρόβλημα των στατιστικών ελέγχων. Με την εργασία των Dermanis and Rossikopoulos (1991) οι σχετικές τεχνικές επεκτάθηκαν και στις εφαρμογές της ολοκληρωμένης γεωδαισίας.

1. Η περίπτωση των δύο συνιστωσών:

$$E\{\mathbf{e}\mathbf{e}^T\} = \sigma_v^2\ \mathbf{Q} + \sigma_s^2\ \mathbf{G}\ \mathbf{K}\ \mathbf{G}^T \tag{B.1}$$

όπου $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 + \ldots + \mathbf{Q}_m$ είναι ο συνολικός πίνακας συμμεταβλητοτήτων των παρατηρήσεων και $\mathbf{Q}_i$ ο πίνακας συμμεταβλητοτήτων της i ομάδας των παρατηρήσεων. Οι συνιστώσες σ_v^2 και σ_s^2 των παρατηρήσεων και των σημάτων αντίστοιχα υπολογίζονται από τους τύπους

$$\hat{\sigma}_v^2 = \frac{\hat{\varphi}_v}{tr\{\mathbf{W}_{vv}\ \mathbf{Q}\}} = \frac{\hat{\mathbf{v}}^T\mathbf{Q}^{-1}\ \hat{\mathbf{v}}}{f_v} \tag{B.2}$$

$$\hat{\sigma}_s^2 = \frac{\hat{\mathbf{s}}^T\mathbf{K}^{-1}\ \hat{\mathbf{s}}}{tr\{\mathbf{W}_{ss}\ \mathbf{K}\}} = \frac{\hat{\mathbf{s}}^T\mathbf{K}^{-1}\ \hat{\mathbf{s}}}{f_s}\quad,\quad f = f_v + f_s = n + k - r \tag{B.3}$$

όπου f_v είναι ο αριθμός πλεονασμού των παρατηρήσεων και f_s ο αριθμός πλεονασμού της στοχαστικής πληροφορίας των σημάτων, και

$$\mathbf{W}_{vv} = \mathbf{M}^{-1} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\ \mathbf{R}_x^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{M}^{-1}$$

$$\mathbf{W}_{ss} = \mathbf{G}^T(\mathbf{M}^{-1} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\ \mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{M}^{-1})\ \mathbf{G} \tag{B.4}$$

2. Η περίπτωση των διαφορετικών ομάδων παρατηρήσεων:

$$E\{\ \mathbf{e}\mathbf{e}^T\ \} = \sum_{i=1}^{m_v}\sigma_i^2\ \mathbf{Q}_i + \sigma_s^2\ \mathbf{G}\mathbf{K}\mathbf{G}^T \tag{B.5}$$

Οι m_v συνιστώσες σ_i^2 των παρατηρήσεων υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{\hat{\varphi}_i}{tr\{\mathbf{W}_{vv}\ \mathbf{Q}_i\}} = \frac{\hat{\mathbf{v}}_i^T\mathbf{Q}_i^{-1}\ \hat{\mathbf{v}}_i}{f_i}\ ,\qquad i = 1,2,\ldots,m_v \tag{B.6}$$

όπου f_i είναι ο αριθμός πλεονασμού της i ομάδας των παρατηρήσεων, ενώ η μεταβλητότητα των σημάτων από τη σχέση (**)

$$\hat{\sigma}_s^2 = \frac{\hat{\mathbf{s}}^T\mathbf{K}^{-1}\ \hat{\mathbf{s}}}{tr\{\mathbf{W}_{ss}\ \mathbf{K}\}} = \frac{\hat{\mathbf{s}}^T\mathbf{K}^{-1}\ \hat{\mathbf{s}}}{f_s} \tag{B.7}$$

όπου f_i είναι ο αριθμός πλεονασμού της i ομάδας των παρατηρήσεων. Το άθροισμα των αριθμών αυτών δίνει τους βαθμούς ελευθερίας

$$f_v = f_1 + f_2 + \ldots + f_{m_v}\qquad . \tag{B.8}$$

3. Η περίπτωση των διαφορετικών ομάδων παρατηρήσεων και των αγνώστων παραμέτρων της συνάρτησης συμμεταβλητότητας.

Ανάλογο πρόβλημα με τη σωστή επιλογή του πίνακα βάρους στη κλασική περίπτωση συνόρθωσης, στην οποία η βέλτιστη ανεπηρέαστη γραμμική εκτίμηση ταυτίζεται με την ειδική περίπτωση της εκτίμησης με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, όπου ο πίνακας βάρους είναι ο αντίστροφος του πίνακα συμμεταβλητοτήτων των σφαλμάτων, είναι και η επιλογή της συνάρτησης συμμεταβλητότητας του πεδίου βαρύτητας. Μια τρίτη λοιπόν εφαρμογή της μεθόδου εκτίμησης των συνιστωσών της μεταβλητότητας αναφοράς είναι ο έλεγχος εγκυρότητας της επιλεγμένης συνάρτησης συμμεταβλητότητας που περιγράφει τη στοχαστική συμπεριφορά των σημάτων. Η συνάρτηση συμμεταβλητότητας K έχει τη μορφή

$$K(\sigma^2,\vartheta)=\sigma^2 f(\vartheta) \tag{B.9}$$

όπου ϑ είναι το διάνυσμα των αγνώστων παραμέτρων της (π.χ. η απόσταση συσχέτιση). Μετά τη γραμμικοποίηση της συνάρτησης συμμεταβλητότητας, αναπτύσσοντάς τη σε σειρά Taylor και αγνοώντας του όρους ανώτερης τάξης ως πρακτικά ασήμαντους

$$\begin{aligned} K(\sigma^2,\vartheta) &= K(\sigma_o^2,\vartheta_o)+\frac{\partial K}{\partial \sigma^2}(\sigma^2-\sigma_o^2)+\sum_i \frac{\partial K}{\partial \vartheta_i}(\vartheta_i-\vartheta_{io}) = \\ &= \sigma_o^2 f(\vartheta_o)+f(\vartheta_o)(\sigma^2-\sigma_o^2)+\sum_i \sigma_o^2 \frac{\partial f}{\partial \vartheta_i}\delta\vartheta_i \end{aligned} \tag{B.10}$$

προκύπτει η γραμμική μορφή της συνάρτησης

$$K(\sigma^2,\vartheta)=\sigma^2 f(\vartheta_o)+\sigma_o^2\sum_i \frac{\partial f}{\partial \vartheta_i}\delta\vartheta_i \quad . \tag{B.11}$$

Οι σχέσεις αυτές χρησιμοποιούνται καταρχήν για την προσαρμογή των επιλεγμένων συναρτήσεων σε δεδομένα, αλλά και σε μια γενίκευση του προβλήματος εκτίμησης των συνιστωσών της μεταβλητότητας αναφοράς

$$E\{\mathbf{e}\mathbf{e}^T\}=\sum_{i=1}^{m_v}\sigma_i^2\,\mathbf{Q}_i+\sum_{i=1}^{m_s}\delta a_1\,\mathbf{G}\,\mathbf{K}_i\,\mathbf{G}^T \tag{B.12}$$

Οι συνιστώσες σ_i^2 των παρατηρήσεων υπολογίζονται από τις σχέσεις (106), ενώ η μεταβλητότητα σ_s^2 και οι άγνωστες παράμετροι δa_i

$$\vartheta_s=[\sigma_s^2 \quad \delta a_2 \quad \cdots \quad \delta a_{m_s}]^T \tag{B.13}$$

της συνάρτησης συμμεταβλητότητας ($\sigma_s^2=\delta a_1$), υπολογίζονται από τη σχέση

$$\hat{\vartheta}_s=\mathbf{J}_{ss}^{-1}\,\boldsymbol{\varphi}_s \tag{B.14}$$

όπου τα στοιχεία του πίνακα $\mathbf{J}_{ss}$ είναι

$$J_{ij}=tr\{\mathbf{W}_{ss}\,\mathbf{K}_i\,\mathbf{W}_{ss}\,\mathbf{K}_j\} \quad , \quad i,j=1,2,\ldots,m_s \tag{B.15}$$

$$\mathbf{K}_i=\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \vartheta_i} \quad , \quad \vartheta_1=\sigma_s^2 \ \text{ και } \ \vartheta_i=a_i \ \text{ για } \ i\geq 2 \tag{B.16}$$

και τα στοιχεία του πίνακα $\boldsymbol{\varphi}_s$ δίνονται από τη σχέση

$$\hat{\varphi}_i = \hat{\mathbf{s}}^T \mathbf{K}^{-1}\, \mathbf{K}_i\, \mathbf{K}^{-1}\, \hat{\mathbf{s}} \quad , \qquad i = 1,2,\ldots,m_s \ . \tag{B.17}$$

Παράρτημα Γ. Η εφαρμογή των στατιστικών ελέγχων στην περίπτωση των στοχαστικών παραμέτρων

Κατά τη συνόρθωση των παρατηρήσεων με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων οι στατιστικοί έλεγχοι των υποθέσεων αναφέρονται στην περίπτωση όπου τα σφάλματα των μετρήσεων ακολουθούν την κανονική κατανομή, μια υπόθεση που είναι ρεαλιστική και στην περίπτωση ενός τοπικού πεδίου βαρύτητας (Wei, 1987, Krakiwsky and Biacs, 1990). Υποθέτουμε δηλαδή ότι τα σφάλματα $\mathbf{e} = \mathbf{G}\ \mathbf{s} + \mathbf{v}$, το στοχαστικό μέρος των εξισώσεων των παρατηρήσεων $\mathbf{w} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{G}\,\mathbf{s} + \mathbf{v}$, όταν τα σήματα $\mathbf{s}$ είναι διαταράξεις του πεδίου βαρύτητας, ακολουθούν την κανονική κατανομή

$$\mathbf{e} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{M}) \tag{Γ.1}$$

με μηδενική προσδοκία και πίνακα συμμεταβλητοτήτων $\sigma^2\mathbf{M}$, όπως προέκυψε από την εφαρμογή του νόμου μετάδοσης συμμεταβλητοτήτων $\mathbf{M} = \mathbf{G}\ \mathbf{K}\ \mathbf{G}^T + \mathbf{P}^{-1}$.

Ένας αρχικός έλεγχος, για όλες συνολικά τις υποθέσεις σχετικά με το μαθηματικό και στοχαστικό μοντέλο της συνόρθωσης των παρατηρήσεων γίνεται με τη βοήθεια του ολικού ελέγχου της μεταβλητότητας αναφοράς. Ελέγχεται δηλαδή η μηδενική υπόθεση $H_o : \sigma^2 = \sigma_o^2$ έναντι της εναλλακτικής $H_\alpha : \sigma^2 \neq \sigma_o^2$, όπου σ_o^2 είναι μια αρχική γνωστή τιμή της μεταβλητότητας αναφοράς.

1. Σάρωση δεδομένων

Ο έλεγχος για την ύπαρξη των πιθανών συστηματικών ή χονδροειδών σφαλμάτων στις παρατηρήσεις γίνεται ακολουθώντας τη τεχνική που είναι γνωστή ως σάρωση δεδομένων. Για την εφαρμογή της σάρωσης δεδομένων στη στοχαστική αντιμετώπιση των σημάτων, υπολογίζονται οι ποσότητες

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{M}^{-1}\, \hat{\mathbf{e}} \tag{Γ.2}$$

όπου $\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{G}\,\hat{\mathbf{s}} + \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{M}\,\mathbf{W}\,\mathbf{e}$ και $\mathbf{W} = \mathbf{M}^{-1} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{M}^{-1}$. (Γ.3)

Από την παραπάνω σχέση, αν εφαρμοσθεί ο νόμος μετάδοσης των συμμεταβλητοτήτων και γίνουν οι πράξεις, προκύπτει ο πίνακας των συντελεστών των συμμεταβλητοτήτων των ποσοτήτων $\hat{\mathbf{u}}$

$$\mathbf{Q}_{\hat{u}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}_{\hat{e}}\,\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{M} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T)\,\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{W}\,. \tag{Γ.4}$$

όπου $\mathbf{Q}_{\hat{e}} = \mathbf{M} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$. Η σάρωση δεδομένων βασίζεται στις σχέσεις

$$r_i = \frac{\hat{u}_i}{\hat{\sigma}(\hat{u}_i)} \quad , \quad \hat{\sigma}(\hat{u}_i) = \hat{\sigma}\sqrt{\mathbf{W}_{ii}} \quad , \quad t_i = r_i\sqrt{\frac{f-1}{f-r_i^2}} \ \sim t_{f-1} \quad . \tag{Γ.5}$$

2. Έλεγχος της συμβατότητας δύο ομάδων παρατηρήσεων

Έστω ότι διατίθενται δύο ομάδες παρατηρήσεων

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{A}_1\ \mathbf{x} + \mathbf{G}_1\ \mathbf{s}_1 + \mathbf{v}_1 \tag{Γ.6}$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{A}_2\ \mathbf{x} + \mathbf{G}_2\ \mathbf{s}_2 + \mathbf{v}_2 \tag{Γ.7}$$

Ο έλεγχος των παρατηρήσεων της μιας ομάδας συνολικά (π.χ. της δεύτερης), σε σχέση με τις παρατηρήσεις της άλλης ομάδας (της πρώτης), μπορεί να γίνει ή από τα αποτελέσματα της ταυτόχρονης συνόρθωσης των δύο ομάδων, ή από τα αποτελέσματα της συνόρθωσης της μιας ομάδας (της πρώτης).

Στην πρώτη περίπτωση ο έλεγχος βασίζεται στις σχέσεις

$$\hat{\mathbf{u}}_2 = (\mathbf{M}^{-1}\ \hat{\mathbf{e}})_2 \ = (\mathbf{M}^{-1})_{22}\ \hat{\mathbf{e}}_2 \tag{Γ.8}$$

όπου $\hat{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{G}_2\ \hat{\mathbf{s}}_2 + \hat{\mathbf{v}}_2$ και

$$r^2 = \frac{\hat{\mathbf{u}}_2^T\ \mathbf{W}_{22}^{-1}\ \hat{\mathbf{u}}_2}{n_2\ \hat{\sigma}^2} \quad , \quad F = r^2\ \frac{f-n_2}{f-n_2\ r^2} \ \sim \ F_{n_2, f-n_2} \quad . \tag{Γ.9}$$

Για τη δεύτερη περίπτωση, αν υποθέσουμε ότι θέλουμε να ελέγξουμε τη δεύτερη ομάδα των παρατηρήσεων από τη λύση της πρώτης ομάδας, ακολουθούμε την παρακάτω τεχνική:

α. Συνόρθωση και έλεγχος της πρώτης ομάδας: Από τη λύση της πρώτης ομάδας, με κριτήριο $\mathbf{s}^T\mathbf{K}^{-1}\ \mathbf{s} + \mathbf{v}^T\mathbf{P}\ \mathbf{v} = \min.$, προκύπτει

$$\hat{\mathbf{x}}^{(1)} = (\mathbf{A}_1^T\ \mathbf{M}_1^{-1}\ \mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{A}_1^T\ \mathbf{M}_1^{-1}\ \mathbf{w}_1 \tag{Γ.10}$$

$$\hat{\mathbf{s}}_1^{(1)} = \mathbf{G}_1^T\ \mathbf{K}_1^T\ \mathbf{M}_1^{-1}\ \mathbf{A}_1(\ \mathbf{w}_1 - \mathbf{A}_1\ \hat{\mathbf{x}}^{(1)}) \tag{Γ.11}$$

όπου $\mathbf{M}_1 = \mathbf{G}_1\ \mathbf{K}_1\ \mathbf{G}_1^T + \mathbf{P}_1^{-1}$.

β. Πρόγνωση των σημάτων $\mathbf{s}_2$ της ομάδας (2):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{s}}_2^{(1)} &= \mathbf{K}_{12}^T\ \mathbf{M}_1^{-1}\ \mathbf{A}_1(\ \mathbf{w}_1 - \mathbf{A}_1\ \hat{\mathbf{x}}^{(1)}) = \mathbf{K}_{12}^T\ \mathbf{P}_1(\ \mathbf{w}_1 - \mathbf{A}_1\ \hat{\mathbf{x}}^{(1)} - \mathbf{G}_1\hat{\mathbf{s}}_1^{(1)}) = \\ &= \mathbf{K}_{12}^T\ \mathbf{M}_1^{-1}\left[\mathbf{I} - \mathbf{A}_1\ (\mathbf{A}_1^T\ \mathbf{M}_1^{-1}\ \mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{A}_1^T\ \mathbf{M}_1^{-1}\right](\mathbf{G}_1\ \mathbf{s}_1 + \mathbf{v}_1) \end{aligned} \tag{Γ.12}$$

γ. Υπολογισμός των στατιστικών ποσοτήτων του ελέγχου

$$\tilde{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{w}_2 - \mathbf{A}_2\ \hat{\mathbf{x}}^{(1)} - \mathbf{G}_2\ \tilde{\mathbf{s}}_2^{(1)} = \mathbf{G}_2\ \mathbf{s}_2 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{F}\ \mathbf{M}_1^{-1}(\mathbf{G}_1\ \mathbf{s}_1 + \mathbf{v}_1) \tag{Γ.13}$$

$$\mathbf{Q}_{\tilde{v}} = \mathbf{M}_2 + \mathbf{F}\ \mathbf{M}_1^{-1}\ \mathbf{F}^T \tag{Γ.14}$$

όπου $\mathbf{F} = (\mathbf{G}_2\ \mathbf{K}_{12}^T\ \mathbf{M}_1^{-1}\ \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2)\ (\mathbf{A}_1^T\ \mathbf{M}_1^{-1}\ \mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{A}_1^T - \mathbf{G}_2\ \mathbf{K}_{12}^T$ (Γ.15) και $\mathbf{M}_2 = \mathbf{G}_2 \, \mathbf{K}_2 \, \mathbf{G}_2^T + \mathbf{P}_2^{-1}$. Ο έλεγχος βασίζεται στη σχέση

$$F = \frac{\tilde{\mathbf{v}}_2^T \, \mathbf{Q}_{\tilde{v}}^{-1} \, \tilde{\mathbf{v}}_2}{n_2 \, \hat{\sigma}_1^2} \sim F_{n_2, f - n_2} \quad . \tag{Γ.16}$$

3. Ολικός έλεγχος των σημάτων

Η παραπάνω σχέση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον ολικό έλεγχο σημαντικότητας των σημάτων. Το σύστημα των εξισώσεων παρατηρήσεων και το κριτήριο των ελαχίστων τετραγώνων (98) είναι ισοδύναμα με το σύστημα

$$\begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{G} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{v}_s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_s^T \mathbf{K}^{-1} \; \mathbf{v}_s + \mathbf{v}^T \mathbf{P} \; \mathbf{v} = \min . \tag{Γ.17}$$

Ο έλεγχος βασίζεται στη σχέση

$$F = \frac{f - q}{q} \frac{\delta\hat{\varphi}}{\hat{\varphi} - \delta\hat{\varphi}} \sim F_{q, f-q} \tag{Γ.18}$$

όπου μετά από πράξεις προκύπτει ότι

$$\hat{\varphi} = \hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \, \hat{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{s}}^T \mathbf{K}^{-1} \, \hat{\mathbf{s}} \, , \quad \delta\hat{\varphi} = \hat{\mathbf{s}}^T \, (\mathbf{K} - \mathbf{Q}_{\hat{s}})^{-1} \, \hat{\mathbf{s}} \tag{Γ.19}$$

και $f = n + k - r$ οι βαθμοί ελευθερίας.

4. Ο έλεγχος της γενικής υπόθεσης

Σχετικά με την εφαρμογή του ελέγχου της γενικής υπόθεσης, οι υποθέσεις που ελέγχονται μπορεί να αφορούν τις συντεταγμένες των κορυφών του δικτύου και τα σήματα $\dot{\mathbf{H}} \, \mathbf{x} + \ddot{\mathbf{H}} \, \mathbf{s} = \mathbf{z}$, ή μόνο τις συντεταγμένες $\dot{\mathbf{H}} \, \mathbf{x} = \mathbf{z}$, ή τα σήματα $\ddot{\mathbf{H}} \, \mathbf{s} = \mathbf{z}$. Από τις εκτιμήσεις $\hat{\mathbf{x}}$ και $\hat{\mathbf{s}}$, υπολογίζονται τα σφάλματα κλεισίματος των δεσμεύσεων και ο πίνακας των συμμεταβλητοτήτων τους $\mathbf{Q}_{\hat{e}}$. Ο έλεγχος βασίζεται στη σχέση

$$F = \frac{\hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{Q}_{\hat{e}}^{-1} \, \hat{\mathbf{e}}}{k \, \hat{\sigma}^2} \sim F_{k, f-k} \tag{Γ.20}$$

όπου f οι βαθμοί ελευθερίας και k ο αριθμός των δεσμεύσεων που ελέγχονται. Οι σχετικές σχέσεις δίνονται στον πίνακα (Γ.1).

Μια απλή και χρήσιμη εφαρμογή είναι ο έλεγχος σημαντικότητας των σημάτων, H_o: $\mathbf{s} = \mathbf{0}$, που βασίζεται στη σχέση

$$F = \frac{\hat{\mathbf{s}}^T \mathbf{Q}_{\hat{s}}^{-1} \, \hat{\mathbf{s}}}{q \, \hat{\sigma}^2} \sim F_{q, f-q} \tag{Γ.21}$$

όπου $f = n + k - (r + q)$ είναι οι βαθμοί ελευθερίας και q ο αριθμός των σημάτων.

Εναλλακτικές σχέσεις για τον παραπάνω έλεγχο βασίζονται στη λύση του διευρυμένου μοντέλου, όπου οι υποθέσεις που ελέγχονται συμμετέχουν ως αυστηρά ουσιαστικές δεσμεύσεις. Οι σχετικές σχέσεις δίνονται στον πίνακα (Γ.2).

Πίνακας Γ.1. Τα σφάλματα κλεισίματος κατά τον έλεγχο της γενικής υπόθεσης.

$\dot{\mathbf{H}}\,\mathbf{x}+\ddot{\mathbf{H}}\,\mathbf{s}=\mathbf{z}$	$\hat{\mathbf{e}}=\dot{\mathbf{H}}\,\hat{\mathbf{x}}+\ddot{\mathbf{H}}\,\hat{\mathbf{s}}-\mathbf{z}$ $\mathbf{Q}_{\hat{e}}=\dot{\mathbf{H}}\,\mathbf{Q}_{\hat{x}}\,\dot{\mathbf{H}}^T-\dot{\mathbf{H}}\,\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{s}}\,\ddot{\mathbf{H}}^T-\ddot{\mathbf{H}}\,\mathbf{Q}_{xs}^T\,\dot{\mathbf{H}}^T-\ddot{\mathbf{H}}\,\mathbf{Q}_{\hat{s}}\,\ddot{\mathbf{H}}^T$
$\dot{\mathbf{H}}\,\mathbf{x}=\mathbf{z}$	$\hat{\mathbf{e}}=\dot{\mathbf{H}}\,\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{z}\ ,\ \ \mathbf{Q}_{\hat{e}}=\dot{\mathbf{H}}\,\mathbf{Q}_{\hat{x}}\,\dot{\mathbf{H}}^T$
$\ddot{\mathbf{H}}\,\mathbf{s}=\mathbf{z}$	$\hat{\mathbf{e}}=\ddot{\mathbf{H}}\,\hat{\mathbf{s}}-\mathbf{z}\ ,\ \ \mathbf{Q}_{\hat{e}}=\ddot{\mathbf{H}}\,\mathbf{Q}_{\hat{s}}\,\ddot{\mathbf{H}}^T$

Πίνακας Γ.2. Η λύση των ουσιαστικών δεσμεύσεων.

$\dot{\mathbf{H}}\,\mathbf{x}+\ddot{\mathbf{H}}\,\mathbf{s}=\mathbf{z}$	$\hat{\mathbf{x}}_H=\hat{\mathbf{x}}-(\mathbf{Q}_{\hat{x}}\,\dot{\mathbf{H}}^T+\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{s}}\,\ddot{\mathbf{H}}^T)\,\mathbf{Q}_{\hat{e}}\,\hat{\mathbf{e}}$ $\hat{\mathbf{s}}_H=\hat{\mathbf{s}}-(\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{s}}^T\,\dot{\mathbf{H}}^T+\mathbf{Q}_{\hat{s}}\,\ddot{\mathbf{H}}^T)\,\mathbf{Q}_{\hat{e}}\,\hat{\mathbf{e}}$
$\dot{\mathbf{H}}\,\mathbf{x}=\mathbf{z}$	$\hat{\mathbf{x}}_H=\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{Q}_{\hat{x}}\,\dot{\mathbf{H}}^T\mathbf{Q}_{\hat{e}}\,\hat{\mathbf{e}}\,,\ \ \hat{\mathbf{s}}_H=\hat{\mathbf{s}}-\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{s}}^T\,\dot{\mathbf{H}}^T\mathbf{Q}_{\hat{e}}\,\hat{\mathbf{e}}$
$\ddot{\mathbf{H}}\,\mathbf{s}=\mathbf{z}$	$\hat{\mathbf{x}}_H=\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{s}}\,\ddot{\mathbf{H}}^T\mathbf{Q}_{\hat{e}}\,\hat{\mathbf{e}}\,,\ \ \hat{\mathbf{s}}_H=\hat{\mathbf{s}}-\mathbf{Q}_{\hat{s}}\,\ddot{\mathbf{H}}^T\mathbf{Q}_{\hat{e}}\,\hat{\mathbf{e}}$

όπου $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{s}}$ και $\mathbf{Q}_{\hat{x}}$, $\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{s}}$, $\mathbf{Q}_{\hat{s}}$ προέκυψαν από τη λύση με ελάχιστες δεσμεύσεις. Στη συνέχεια υπολογίζονται τα σφάλματα $\hat{\mathbf{v}}_H$, το κριτήριο των ελαχίστων τετραγώνων $\hat{\varphi}_H$ και η μεταβλητότητα αναφοράς $\hat{\sigma}^2_H$. Ο έλεγχος βασίζεται στη σχέση

$$F=\frac{f}{k}\,\frac{\hat{\varphi}_H-\hat{\varphi}}{\hat{\varphi}}=\frac{f}{k}\,\frac{\delta\hat{\varphi}}{\hat{\varphi}_H-\delta\hat{\varphi}}\ \sim\ F_{k,f-k} \qquad (\Gamma.22)$$

όπου f οι βαθμοί ελευθερίας και k ο αριθμός των δεσμεύσεων που ελέγχονται.

5. Επιλογή των πρόσθετων παραμέτρων

Μια εφαρμογή του ελέγχου της γενικής υπόθεσης αφορά στη σημαντικότητας των παραμέτρων $\mathbf{y}$ ή $\mathbf{a}$ των πολυωνύμων που περιγράφουν τις μεταβολές των συστημάτων αναφοράς ή τις επιφάνειες που προσαρμόζονται στα υψομετρικά δεδομένα. Ο ολικός έλεγχος των πρόσθετων παραμέτρων ($H_o:\mathbf{a}=\mathbf{0}\,,H_a:\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$) μπορεί να προκύπτει από τα αποτελέσματα της λύσης του συστήματος των εξισώσεων των παρατηρήσεων $\mathbf{w}=\mathbf{A}\,\mathbf{x}+\mathbf{F}\,\mathbf{a}+\mathbf{v}$ με τη βοήθεια της σχέσης

$$F=\frac{\hat{\mathbf{a}}^T\mathbf{Q}_{\hat{a}}^{-1}\,\hat{\mathbf{a}}}{m\,\hat{\sigma}^2}\ \le\ F_{m,f}^{\alpha} \qquad (\Gamma.23)$$

όπου m είναι ο αριθμός των αγνώστων παραμέτρων $\mathbf{a}$, f οι βαθμοί ελευθερίας και $\hat{\sigma}^2$ η ολική μεταβλητότητα αναφοράς. Αν ισχύει η σχέση (36) ή η εναλλακτική της (37), τότε θεωρούμε ότι οι διορθώσεις $\boldsymbol{\delta}=\mathbf{F}\,\mathbf{a}$ ή $\boldsymbol{\delta}=\mathbf{B}\,\mathbf{y}$ δεν είναι σημαντικές, διαφορετικά πρέπει να προχωρήσουμε στην επιλογή των “σημαντικών” παραμέτρων $\mathbf{a}$. Έστω

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_I \\ \mathbf{a}_{II} \end{bmatrix}, \ \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_I & \mathbf{Q}_{I,II} \\ \mathbf{Q}_{I,II}^T & \mathbf{Q}_{II} \end{bmatrix} \tag{Γ.24}$$

όπου $\mathbf{a}_{II}$ η ομάδα των παραμέτρων των συναρτήσεων f_i που ελέγχονται για τη σημαντικότητά τους. Για τον έλεγχο σημαντικότητας των παραμέτρων $\mathbf{a}_{II}$ (H_o : $\mathbf{a}_{II} = \mathbf{0}$ ~ H_α : $\mathbf{a}_{II} \neq \mathbf{0}$) χρησιμοποιούνται οι σχέσεις

$$F_{II} = \frac{\hat{\mathbf{a}}_{II}^T \mathbf{Q}_{II}^{-1} \hat{\mathbf{a}}_{II}}{m_{II} \hat{\sigma}_\delta^2}, \ F_{II} \leq F_{m_{II}, f_\delta}^\alpha \tag{Γ.25}$$

όπου m_{II} είναι ο αριθμός των αγνώστων παραμέτρων $\mathbf{a}_{II}$. Σχετικά με τον έλεγχο σημαντικότητας μιας παραμέτρου (H_o : $a_i = 0$ ~ H_α : $a_i \neq 0$), αν ισχύει η σχέση

$$|t_i| = \left| \frac{\hat{a}_i}{\hat{\sigma}\, q(\hat{a}_i)} \right| \ > \ t_f^{\alpha/2} = \sqrt{F_{1,f}^\alpha} \quad \text{όπου} \quad q(\hat{a}_i) = \sqrt{\{\mathbf{Q}_{\hat{a}}\}_{ii}} \tag{Γ.26}$$

η παράμετρος $\hat{a}_i$ είναι σημαντική.

Μια άλλη μορφή βασίζεται στον έλεγχο σημαντικότητας μιας παραμέτρου, ή ομάδας παραμέτρων, που δεν συμμετέχουν στη συνόρθωση των παρατηρήσεων και που πρόκειται όμως να συμπεριληφθούν, αν ο έλεγχος δείξει ότι είναι σημαντικές. Η σημαντικότητα νέων πρόσθετων παραμέτρων $\mathbf{a}_*$, με πίνακα συντελεστών $\mathbf{F}_*$, που δεν συμπεριλαμβάνονται στις αρχικές εξισώσεις $\mathbf{w} = \mathbf{A}\ \mathbf{x} + \mathbf{F}\ \mathbf{a} + \mathbf{v}$, ελέγχεται με βάση τη σχέση

$$F = \frac{f-q}{q} \frac{\delta\hat{\varphi}}{f\,\hat{\sigma}^2 - \delta\hat{\varphi}} \ \leq \ F_{q,f-q}^\alpha \tag{Γ.27}$$

όπου $\delta\hat{\varphi} = \hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P}\ \mathbf{F}_* [\mathbf{F}_*^T \mathbf{P}\ \mathbf{Q}_{\hat{v}} \mathbf{P}\ \mathbf{F}_*]^{-1} \mathbf{F}_*^T \mathbf{P}\ \hat{\mathbf{v}}$, q είναι ο αριθμός των νέων πρόσθετων παραμέτρων $\mathbf{a}_*$ και οι ποσότητες f, $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}}$, $\hat{\mathbf{v}}$, $\hat{\sigma}^2$ αναφέρονται στο αρχικό σύστημα των εξισώσεων παρατήρησης. Για μία παράμετρο a_*, με διάνυσμα συντελεστών $\mathbf{f}_*^T$, ο έλεγχος παίρνει τη μορφή

$$t = r\sqrt{\frac{f-1}{f-r^2}} \leq t_{f-1}^{\alpha/2} \qquad \text{όπου} \qquad r^2 = \frac{[\mathbf{f}_*^T \mathbf{P}\ \mathbf{Q}_{\hat{v}}^{-1}\ \hat{\mathbf{v}}]^2}{\hat{\sigma}^2\ \mathbf{f}_*^T \mathbf{P}\ \mathbf{Q}_{\hat{v}} \mathbf{P}\ \mathbf{f}_*} \quad . \tag{Γ.28}$$

Βιβλιογραφία

Βλάχος, Δ. (1987): *Τοπογραφία. Τόμος Α: Όργανα και μέθοδοι μετρήσεων*. Υπηρεσία Δημοσιευμάτων ΑΠΘ.

Δερμάνης, Α. (1984): Θεωρία και εφαρμογή της μεθόδου της σημειακής προσαρμογής σε τοπογραφικά προβλήματα. *Γεωδαιτικά Τετράδια*, τομ. 5, No. 2. σελ. 125-162.

Δερμάνης, Α. (1987): *Συνορθώσεις παρατηρήσεων και θεωρία εκτίμησης*. Εκδόσεις Ζήτη.

Δερμάνης Α. και Α Φωτίου (1992): *Μέθοδοι και εφαρμογές συνόρθωσης των παρατηρήσεων*. Εκδόσεις Ζήτη.

Ρωσσικόπουλος, Δ. (1986): *Ολοκληρωμένα Τοπογραφικά Δίκτυα Ελέγχου*. Επιστημονική Επετηρίδα Πολυτεχνικής Σχολής ΑΠΘ, Παράρτημα 4, Τόμος Ι.

Ρωσσικόπουλος, Δ. (1999): *Τοπογραφικά Δίκτυα και Υπολογισμοί*. Εκδόσεις Ζήτη

Ρωσσικόπουλος, Δ. (2012): *Τεκτονική Γεωδαισία. Μετρώντας τις παραμορφώσεις της γης και των τεχνικών έργων*. Εκδόσεις Ζήτη (υπό έκδοση).

Denker H., W. Torge and D. Wenzel (2000): Investigation of Different Methods for the Combination of Gravity and GPS/Levelling Data. In: K. P. Schwarz (Ed.), *Geodesy Beyond 2000. The Challenges of the First Decade*. IAG General Assembly, Birmingham, Jyly 19-30, 1999. IAG Symbosia, 121: 137-140. Springer Verlag.

Dermanis, A. (1984): Optimization Problems in Geodetic Networks with Signals. In: E. W. Grafarend and F. Sansó (eds.): *Optimization and Design of Geodetic Networks*. Springer – Verlag, pp. 221-256.

Dermanis, A. and D. Rossikopoulos (1991): Statistical Inference in Integrated Geodesy. *IUGG XXth General Assemply*. Vienna, August 11-24, 1991.

Dinter, G., M. Illner and R. Jäger (1996): A synergetic approach for the transformation of ellipsoidal heights into a standard height reference system. In: E. Gubler H. Hornik (eds.): *Report on the Symposium of the IAG Subcommission for Europe (EUREF)*. Heft Nr. 57, pp. 198-217.

Eissfeller, B. (1988): The estimation of orthometric heights from GPS baseline vectors using gravity field information and least-squares collocation. In: H. Landau, B. Eissfeller and Gunter W Hein (eds.) *GPS research 1985 at the Institute of Astronomical and Physical Geodesy*. Universitärer Studiengang Vermessungswesen, Universität der Bundeswehr München, pp. 107-126.

Featherstone, W.E., Dentith, M.C. and Kirby, J.F. (1998): Strategies for the accurate determination of orthometric heights from GPS. *Survey Review*, 34: 278-296.

Grafarend, E. (1985). Variance – Covariance Component Estimation. Theoretical results and Geodetic Applications. In: Statistics and Decisions, Supplement Issue No. 2: 407-441.

Grebenitcharsky, R. S., E. V. Rangelova, M. G. Sideris (2005): Transformation between gravimetric and GPS/levelling-derived geoids using additional gravity information. Journal of Geodynamics 39, pp. 527-544.

Hardy, R. L. (1971): Multiquadric Equations of Topography and Other Irregular Surfaces. *J. Geoph. Res.* 76 (8): 1905-1915.

Hardy, R. L. (1977): Least Squares Prediction. Phtogrammetric Engineerind and Remote

Sensing, Vol. 43, No. 4: 475-492.

Hatjidakis, N. and D. Rossikopoulos (2002): Orthometric Heights from GPS: The Integrated Approach. In: I. N. Tziavos (ed.): *Gravity and Geoid, 2002. 3rd meeting of the International Gravity and Geoid Commission*. Thessaloniki, August 26-30, Editions Ziti, pp. 401-406.

Hein, G. W. (1985): Orthometric Height Determination using GPS observations and the integrated geodesy adjustment model. *NOAA Technical Report* NOS 110 NGS 32, Rockville, MD.

Hein, G. W., A. Leick and S. Lambert (1988): Orthometric Height Determination using GPS and gravity field data. *GPS'88 Conference on Engineering. Applications of GPS Satellite Surveying Technology*, May 11-14, 1988, Nashville, TN.

Heiskanen and Moritz (1967): *Physical Geodesy*. W. H. Freeman.

Holdahl (1978): Models for extracting vertical crustal movements from leveling data. *Int. Symp. on the Applications of Geodesy to Geodynamics*, Columbus, Ohio. Dept. of Geod. Sci., Rep. No. 280, pp. 183-190.

Jordan, S. K. (1972): Self-consistend models for the gravity anomaly, vertical deflections and undulations of the geoid. *J. Geoph. Res.* 77 (20): 3660-3670.

Kotsakis, C. (2008): Transforming ellipsoidal heights and geoid undulations between different geodetic reference frames. *Journal of Geodesy* 82, pp. 249-260.

Kotsakis, C. and M. C. Sideris (1999): On the adjustment of combined GPS/levelling/geoid networks. *Journal of Geodesy* 73, pp. 412-421.

Krakiwsky, E. and Z. F. Biacs (1990): Least Squares Collocation and Statistical Testing. Bull. Geod. 64, pp. 73-87.

Meier, S. (1981): Planar geodetic covariance functions. *Reviews of Geophysics and Space Physics*, vol. 19, No. 4, pp. 673-686.

Milbert D. G. (1988): Treatment of geodetic leveling in the integrated geodesy approach. The Ohio State University, *Reports of the Department of Geodetic Science*, Report No. 396, p. 138.

Moritz H. (1976): Covariance Functions in Least Squares Collocation. The Ohio State University, *Reports of the Department of Geodetic Science*, Report No. 240, p. 79.

Moritz, H. (1980): *Advanced Physical Geodesy*. H. Wichmann, Karlsruhe.

Rao C. R. (1971): Estimation of Variance Components – MINQUE Theory. *Journal of Multivariate Analysis*, 1, 257-275.

Rao C. R. and J. Kleffe (1988): *Estimation of Variance Components and Applications*. North Holland.

Schaffrin, B. (1983): Varianz-Kovarianz-Komponentenschätzung bei der Ausgleichung heterogener Wiederholungsmessungen. *Deutsche Geodätische Kommission. Bayerische Akademie der Wissenschaften*, Report C 282, München.

Soler (1976): On differential transformations between cartesian and curvilinear (geodetic) coordinates. The Ohio State University, *Reports of the Department of Geodetic Science*, Report No. 236, p. 82.

Wei, M. (1987): Statistical Problems in Collocation. *Manuscripta Geodaetica* 12: 282-289.